מבוא לאסטרופיסיקה וקוסמולוגיה - כוכבים הומולוגיים.

אוסף המשוואות שלנו הוא:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa_m \rho}{16\pi a c r^2 T^3} L \overset{\text{אטימות של קרמר}}{=} -\frac{3\tilde{\kappa}_0 \rho^2 T^{-3.5}}{16\pi a c r^2 T^3} L$$

היות ואנו לא יודעים במדויק כיצד יהיו הריאקציות הגרעיניות בשלב זה נכתוב: $\epsilon = \tilde{\epsilon}_0 \rho T^n$. הסיבה ש- ϵ יחסי ρ הוא מפני שקצב של ריאקציה בין שני חלקיקים (פר חלקיק) גדל עם הצפיפות. n תהיה תלויה אותה נמצא בהמשך (למעשה $n\sim4$ עבור בערת מימן בשמש, ועבור כוכבים שמבעירים מימן ע"י C,N ו-O כ"קטליזטורים", $n\sim20$). כמו כן:

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon = 4\pi r^2 \tilde{\epsilon}_0 \rho^2 T^n$$

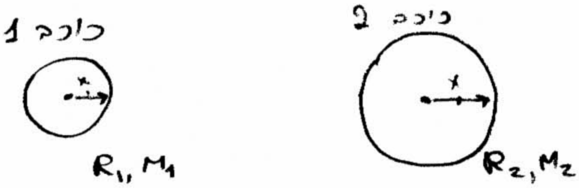
אם הכוכב נשלט ע"י לחץ הגאז:

$$P = \frac{\rho k T}{\mu m_p}$$

אם הכוכב נשלט ע"י לחץ הקרינה:

$$P = \frac{1}{3} a T^4$$

הפתרון המלא של המשוואות הנ"ל דורש אינטגרציה נומרית. אולם, בתנאים מסוימים ניתן בכל זאת למצוא הרבה תכונות של הפתרונות בלי ממש לפתור את מבנה הכוכב. הכוונה היא שבהינתן פתרון נתון לכוכב ספציפי, ניתן בתנאים מסוימים למצוא תכונות של כוכבים בעלי, לדוגמא, מסה שונה. זאת, כל עוד צד ימין של המשוואות הוא חזקתי במשתנים. לדוגמא, אם הלחץ הכולל היה מורכב מלחץ קרינה + לחץ גאז ושניהם היו חשובים אזי P לא היה חזקתי ב-ρ ו-T. במידה והתנאים הנ"ל מתקיימים (לדוגמא, κ אינו תלוי ברדיוס הכוכב) אזי בין שני כוכבים יהיו קשורים זה לזה ע"י טרנספורמציה פשוטה.



שני כוכבים 1 ו- 2 שקולים זה לזה (הומולוגים) אם כל נקודה $x=r_1/R_1$ שקולה לנקודה $x=r_2/R_2$ בכוכב השני. כלומר, שגודל $X_2(x)$ (לדוגמא הלחץ) בכוכב 2 יהיה קשור לגודל $X_1(x)$ בכוכב 1 רק ע"י פקטור נומרי.

אם הכוכבים הומולוגיים אזי המסה הכלואה ברדיוס $r_1=xR_1$ צריכה להיות פרופורציונית למסה הכלואה ברדיוס $r_2=xR_2$ בכוכב 2 וזאת מכיון שב- $x=1$ $m_1(x=1)=M_1$ ו- $m_2(x=1)=M_2$ לכן: $dM_2(x)=\frac{M_2}{M_1}dM_1(x)$. ממשוואת המסה:

$$\left.\frac{dm_2}{dr_2}\right|_x = 4\pi r_2^2(x)\rho_2(x) = 4\pi\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 r_1^2(x)\rho_2(x)$$

אולם מצד שני:

$$\left.\frac{dm_2}{dr_2}\right|_x = \left.\frac{dm_2}{dm_1}\right|_x \left.\frac{dm_1}{dr_1}\right|_x \left.\frac{dr_1}{dr_2}\right|_x = \left(\frac{M_2}{M_1}\right)4\pi r_1^2(x)\rho_1(x)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

כלומר:

$$\rho_2(x)=\rho_1(x)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3\left(\frac{M_2}{M_1}\right)$$

כלומר, אם אנחנו יודעים את הצפיפות בכוכב 1 ואת יחס המסות והרדיוסים, ניתן למצוא את הצפיפות בכוכב השני. מהמשוואה של הלחץ, מתקבל:

$$\left.\frac{dP_1}{dr_1}\right|_x = \frac{dP_1}{dx}\underbrace{\frac{dx}{dr_1}}_{1/R_1} \Rightarrow \frac{dP_1}{dx} = \frac{dP_1}{dr_1}R_1 = -R_1\frac{Gm_1}{r_1^2}\rho_1 =$$

$$= -R_2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)Gm_2\left(\frac{M_1}{M_2}\right)\frac{1}{r_2^2}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\rho_2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

$$= \underbrace{-R_2\frac{Gm_2}{r_2^2}\rho_2}_{=\frac{dP_2}{dx}}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^4\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2 = \frac{dP_2}{dx}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^4\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2$$

נבצע כעת אינטגרציה dx מ- $x=1$ עד $x=x$. הואיל ו- $P_1(x=1)=P_2(x=1)=0$ נקבל:

$$P_2(x)=P_1(x)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2$$

נניח שהכוכב (נשלט) על-ידי לחץ הגאז נקבל אז:

$$T_2 = \frac{\mu_2 m_p}{k}\frac{P_2}{\rho_2} = \mu_1\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\frac{m_p}{k}P_1\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

בזה אנחנו מאפשרים למשקל המולקולרי בשני הכוכבים להיות שונה!

$$= \underbrace{\frac{\mu_1 m_p P_1}{k\rho_1}}_{T_1}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\left(\frac{M_2}{M_1}\right)$$

דהיינו:

$$T_2(x) = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\left(\frac{M_2}{M_1}\right)T_1(x)$$

עבור גאז עם לחץ גאז דומיננטי. מהמשוואה של עוצמת ההארה, מתקבל:

$$\frac{dL_2}{dx} = \frac{dL_2}{dr_2}R_2 = 4\pi r_2^2\tilde{\epsilon}_2\rho_2^2T_2^n\cdot R_2 =$$

$$= R_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\cdot 4\pi r_1^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\tilde{\epsilon}_1\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2}{\tilde{\epsilon}_1}\right)\rho_1^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3\left(\frac{M_2}{M_1}\right)T_1^n\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^n\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^n$$

$$= \frac{dL_1}{dx}\cdot\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n+3}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{n+2}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^n\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2}{\tilde{\epsilon}_1}\right)$$

ואחרי אינטגרציה על dx: (הפעם מ- $x=0$ היכן ש- L_1 ו- L_2 שווים לאפס):

$$L_2(x) = L_1(x)\cdot\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n+3}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{n+2}\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2}{\tilde{\epsilon}_1}\right)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^n$$

המשוואה האחרונה בה ניתן להשתמש היא מעבר הקרינה:

$$\frac{dT_2}{dx} = R_2\frac{dT_2}{dr_2} = R_2\boxed{(-)\frac{3}{16}\frac{\tilde{K}_2\rho_2^2T_2^{-6.5}}{\pi a c\, r_2^2}}L_2 = R_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right)A\tilde{K}_1\left(\frac{\tilde{K}_2}{\tilde{K}_1}\right)\times$$

$\equiv A$ לשם נוחות.

$$\times\rho_1^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^6\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2T_1^{-6.5}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{-6.5}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{-6.5}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{-6.5}\frac{1}{r_1^2}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\times$$

$$\times L_1\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n+3}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{n+2}\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2}{\tilde{\epsilon}_1}\right)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^n =$$

$$= \frac{dT_1}{dx}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\underbrace{-1+6-6.5\overset{+2}{}+n+3}_{=n+3.5}}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\underbrace{2-6.5+n+2}_{n-2.5}}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{n-6.5}\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2}{\tilde{\epsilon}_1}\right)\left(\frac{\tilde{K}_2}{\tilde{K}_1}\right)$$

אולם, ישנו הקשר הקודם שקיבלנו בין T_2 לבין T_1 (ממשוואת המצב).

לכן:

$$\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\left(\frac{M_2}{M_1}\right) = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n+3.5}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{n-2.5}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{n-6.5}\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2}{\tilde{\epsilon}_1}\right)\left(\frac{\tilde{\kappa}_2}{\tilde{\kappa}_1}\right)$$

או לחילופין:

$$\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2}{\epsilon_1}\right)\left(\frac{\tilde{\kappa}_2}{\tilde{\kappa}_1}\right)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{n-7.5}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{n-3.5}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n+2.5} = 1$$

דהיינו:

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \sim \underbrace{\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2\tilde{\kappa}_2}{\tilde{\epsilon}_1\tilde{\kappa}_1}\right)^{\frac{2}{2n+5}}} \underbrace{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{2n-15}{2n+5}}} \underbrace{\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{2n-7}{2n+5}}}$$

עבור $n=5$ מקבלים $\frac{2}{15}=0.133$ $\quad -\frac{1}{3}=-0.33$ $\quad \frac{1}{5}=0.2$

עבור $n=20$ מקבלים: $\frac{2}{45}=0.04$ $\quad \frac{25}{45}=0.55$ $\quad \frac{33}{45}=0.73$

בעזרת הקשר של עוצמת ההארה, מקבלים:

$$\left(\frac{L_2}{L_1}\right) = \left(\frac{\tilde{\epsilon}_2}{\tilde{\epsilon}_1}\right)^{1-\frac{2(n+3)}{2n+5}}\left(\frac{\tilde{\kappa}_2}{\tilde{\kappa}_1}\right)^{-\frac{2(n+3)}{2n+5}}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{-\frac{(2n-15)}{2n+5}(n+3)+n}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\underbrace{-\frac{(2n-7)}{(2n+5)}(n+3)+(n+2)}_{p}}$$

למה החזקה בשאלה ?

$$p = \frac{-(2n-7)(n+3)+(n+2)(2n+5)}{2n+5} = \frac{-2n^2-6n+7n+21+2n^2+5n+4n+10}{2n+5}$$

$$= \frac{10n+31}{2n+5}$$

בדרך דומה ניתן לפתח את התלות השנייה:

$$\left(\frac{L_2}{L_1}\right) = \left(\frac{\tilde{\epsilon}_2}{\tilde{\epsilon}_1}\right)^{\frac{-1}{2n+5}}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{14n+45}{2n+5}}\left(\frac{\tilde{\kappa}_2}{\tilde{\kappa}_1}\right)^{-\frac{2n+6}{2n+5}}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\underbrace{\frac{10n+31}{2n+5}}}$$

5.4 עבור $n=5$ ו- 5.13 עבור $n=20$

על מנת להשוות ל- דיאגרמת H-R $(L(T))$ יש לחשב את L כתלות ב- T_{eff} ולא ברדיוס.

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$$

כעת, אנחנו רוצים לבטא את R כתלות ב- L.

הקשרים הם: $R \propto M^{(2n-7)/(2n+5)} \rightarrow M \propto R^{(2n+5)/(2n-7)}$

וגם: $L \propto M^{(10n+31)/(2n+5)}$

ולכן: $L \propto R^{(10n+31)/(2n-7)} \rightarrow R \propto L^{(2n-7)/(10n+31)}$

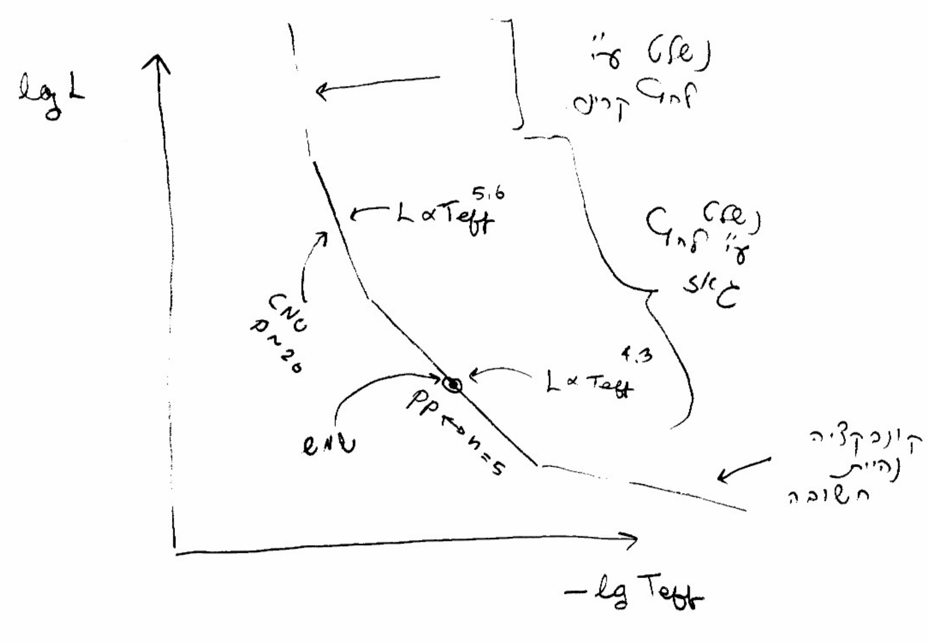
ובעזרת הקשר של גוף שחור!

$$L \propto L^{(4n-14)/(10n+31)} T_{eff}^4$$

$$L^{\left(1-\frac{4n+14}{10n+31}\right)} \propto T_{eff}^4 \rightarrow L \propto T_{eff}^{4\frac{(10n+31)}{(6n+45)}}$$

$$\left(1-\frac{4n+14}{10n+31}\right) = (6n+45)/(10n+31)$$

עבור $n=5$ $L\propto T_{eff}^{4.3}$ ועבור $n=20$: $L\propto T_{eff}^{5.6}$



בעזרת הקשרים האלו ניתן לענות על שאלות נוספות. לדוגמא, מה ההשפעה של יותר מתכות "Z" על הסדרה הראשית. כאשר נקבל ש: $\tilde{K} \propto Z$

עבור כוכב נתון:

$$L \propto Z^{-\frac{2n+6}{2n+5}} \overset{n=5}{\simeq} Z^{-1.06}$$

$$T_{eff}\Big|_{M} \propto L R^{-2} \propto Z^{-\frac{2n+6}{2n+5}+(-2)\frac{2n-15}{2n+5}} \overset{n\simeq 5}{=} Z^{-0.4}$$

מסה נתון, תחת M קבוע.

גם הטמפ' וגם עוצמת ההארה יקטנו עבור כוכב נתון אם נגדיל את Z.