הולכת חום ע"י קונבקציה

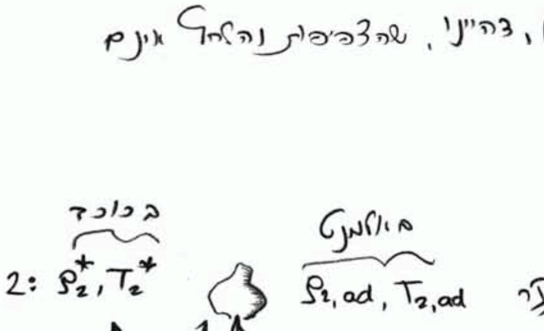
ראינו בהרצאות הקודמות שחום יכול "לזרום" מאזורים חמים לאזורים קרים ע"י קרינה - דהיינו הולכה על סקלה מיקרוסקופית (לרוב) של המהלך החופשי הממוצע של פוטונים. בדרך דומה, חום יכול לזרום ע"י הולכה של אלקטרונים (כמו במתכות וננסים לבנים), ע"י פוננים במוצקים או ע"י התנגשויות בין מולקולות במגזים (למשל באוויר). כל התהליכים האלו הם מיקרוסקופיים - על סקלה של מהלך חופשי של החלקיקים נושאי האנרגיה (פוטונים, מולקולות, אלקטרונים או פוננים).

להבדיל, קונבקציה היא תהליך שהוא מקרוסקופי בעיקרו. בתהליך זה הסעת החום נעשית ע"י תנועה מקרוסקופית של אלמנטים - אלמנטים חמים עולים מעלה ואילו אלמנטים קרים נופלים, דהיינו ע"י הסעה (advection) של חומר המוביל אנרגיה.

כדי להבין מתי קונבקציה מתעוררת נסתכל על מודל פשוט שיתן לנו את הקריטריון הדרוש לקונבקציה.

קריטריון שוורצשילד לקונבקציה

נסתכל על מערכת עם "סטרטיפיקציה" (Stratification), דהיינו, שהצפיפות והלחץ אינם קבועים עם הגובה.



- נבחן כעת אלמנט בעל צפיפות ρ_1 וטמפ' T_1 שהם כמו הטמפ' בסביבה באותו גובה.
- נעלה אותו לגובה 2, בו לסביבה יש טמפ' וצפיפות ρ_2^*, T_2^* שונים.
- כעת לנקודה הכי חשובה - נניח את התנועה של האלמנט מספיק לאט כך שהוא יגיע לשיווי משקל הידרוסטטי עם הסביבה. הנחה זו דורשת תנועות שהן איטיות הרבה יותר ממהירות הקול. אולם נעשה זאת מספיק מהר כך שהאלמנט לא יוכל להחליף חום עם הסביבה - דהיינו, התהליך הוא תהליך אדיאבטי. לכן $\underbrace{\rho_{2,element} = \rho_{2,ad}}_{\text{תהליך אדיאבטי}}$.
- מהו התנאי לכך שהמערכת תהיה לא יציבה?

התנאי לכך שהמערכת תהיה לא יציבה הוא שהאלמנט שהועלה יהיה קל יותר מהסביבה
כך שהוא ירצה להמשיך לעלות! $\rho_{2,ad} - \rho_{2,*} < 0$ [אי יציבות].

אולם, הנחנו שהלחץ משתווה ולכן התנאי הוא שהאלמנט יהיה חם יותר מהסביבה (אלא אם
הנוזל מתכווץ עם הטמפ' - תופעה לא נפוצה אך קיימת - למשל מים בין $4^\circ - 0^\circ$!).

התנאי לאי יציבות הוא: $T_{2,ad} > T_{2,*}$ (עבור $\left.\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right|_p < 0$!).

לחילופין, ניתן לכתוב את התנאי לקונבקציה כ- $\left|\frac{dT}{dr}\right|_{\underbrace{*}_{\text{בכוכב}}} > \left|\frac{dT}{dr}\right|_{adiabatic}$

זאת מכיוון שהנגזרות שליליות בדר"כ - לכן, אם הטמפ' יורדת עם הגובה יותר מהר מאשר
הירידה האדיאבטית עם הגובה, המערכת לא יציבה.

- תנאי נוסף להתפתחות קונבקציה הוא שהאלמנט יכול לשמור על החום שלו במשך יותר
זמן מהדרוש על מנת להגיע לשיווי משקל הידרוסטטי. (לא ננסה לכמת (quantify) תנאי
זה, רק נציין שהוא מתקיים ברוב המקרים שפוגשים באסטרופיסיקה, פרט לחלק החיצוני
של כוכבים בהירים במיוחד).

היות ואנו מחשבים את הנגזרות סביב אותה טמפ' T_*, ניתן לחלק בה ולקבל:

$$\left|\frac{d\ln T}{dr}\right|_* > \left|\frac{d\ln T}{dr}\right|_{ad}$$

היות והלחץ בשני המקרים זהה, ניתן לחלק ב- $\frac{d\ln P}{dr}$ ולקבל:

$$\left|\frac{d\ln T}{d\ln P}\right|_* > \left|\frac{d\ln T}{d\ln P}\right|_{ad}$$

או לחילופין:

$$\left|\frac{d\ln P}{d\ln T}\right|_* < \left|\frac{d\ln P}{d\ln T}\right|_{ad}$$

הקשר האדיאבטי ניתן לפי

$$P \propto \rho^{\gamma}$$

כמו כן, עבור גאז אידיאלי:

$$P \propto \rho T \Rightarrow \rho \propto P/_T$$

$$P \propto P^{\gamma} T^{-\gamma} \Rightarrow P^{\gamma-1} \propto T^{\gamma} \Rightarrow P \propto T^{\gamma/\gamma-1}$$

לכן:

לכן נקבל:

$$\frac{d\ln P}{d\ln T}\Big|_{ad} = \frac{\gamma}{(\gamma-1)}$$

התנאי לאי יציבות היא אם כן:

$$(*) \quad \frac{d\ln P}{d\ln T}\Big|_{*} < \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

מתרמודינמיקה, ידוע שעבור גאז אידיאלי

$$C_p - C_v = \frac{k}{\mu m_p}$$

(כאשר c_p ו-c_v הם הקבועים ליחידת מסה). לכן:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{C_p/C_v}{C_p/C_v - 1} = \frac{C_p}{C_p - C_v} = \frac{C_p \mu m_p}{k}$$

כדי לקשר ל-r, נשתמש במשוואה ההידרוסטטית:

$$\frac{dP}{dr} = -g\rho$$

$$\frac{d\ln P}{dr} = -g\frac{\rho}{P}$$

לכן, את הקריטריון (*) למעלה, ניתן לרשום:

$$\left|\frac{d\ln P}{dr}\frac{dr}{d\ln T}\right|_{*} < \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

$$\left|\frac{d\ln T}{dr}\right|_{*} > \frac{(\gamma-1)}{\gamma}\frac{d\ln P}{dr} = \overbrace{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)}^{\text{מלמעלה}} g \underbrace{\frac{\rho}{P}}_{\text{משוואת גאז אידיאלי}} = \frac{k}{C_p \mu m_p} g \frac{\mu m_p}{kT} = \frac{g}{C_p T}$$

$$\left|\frac{dT}{dr}\right|_{*} > \frac{g}{C_p}$$

הגרדיאנט טמפ' צריך להיות גדול יותר מאשר ירידה של g/c_p דרך הרדיוס, כדי שהאטמוספרה תהיה לא יציבה.

מה קורה בתוך כוכבים?

בתוך כוכבים ישנה עוצמת הארה $L(r)$ כוללת אותה יש להעביר החוצה. עוצמה זו דורשת גרדיאנט טמפ' מסוים על מנת שהשטף הקרינתי יווצר: $\left.\frac{dT}{dr}\right|_{rad}$.

אם גרדיאנט זה קטן יותר מ- $\left.\frac{dT}{dr}\right|_{ad}$ אז אין בעיה - כל הקרינה ניתנת להעברה ללא קונבקציה. אם לעומת זאת $dT/dr|_{rad}$ גדול יותר מ- $dT/dr|_{ad}$ אזי העברת החום ע"י קרינה דורשת גרדיאנט טמפ' המעורר קונבקציה, בתנאים רגילים, הקונבקציה מאוד יעילה כך שבפועל הגרדיאנט נהיה מעט יותר גדול מהגרדיאנט האדיאבטי והקונבקציה מוליכה את כל האנרגיה הנוספת שהקרינה אינה יכולה להעביר. במקרה זה:

$$\frac{L_{rad}}{L_{TOT}} = \frac{|dT/dr|_{ad}}{|dT/dr|_{rad}} < 1$$

הגרדיאנט בפועל

הגרדיאנט הדרוש על מנת להעביר את L_{TOT} בצורה של קרינה.

במקרה זה, שטף האנרגיה הקונבקטיבי יהיה: $L_{conv} = L_{TOT} - L_{rad}$

התנאי לקונבקציה בכוכב הוא אם כן:

$$\left|\frac{dT}{dr}\right|_{rad} = \frac{3\rho \kappa_m L}{16\pi a c r^2 T^3} > \left|\frac{dT}{dr}\right|_{ad} = \frac{g\mu m_p}{k}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)$$

ואז $g = \frac{GM}{r^2}$ כך שמתקבל:

$$\frac{3}{16\pi}\frac{\kappa_m \rho L(r)}{a c T^3} > \frac{GM(r)\mu m_p}{k}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)$$

או בצורה אחרת:

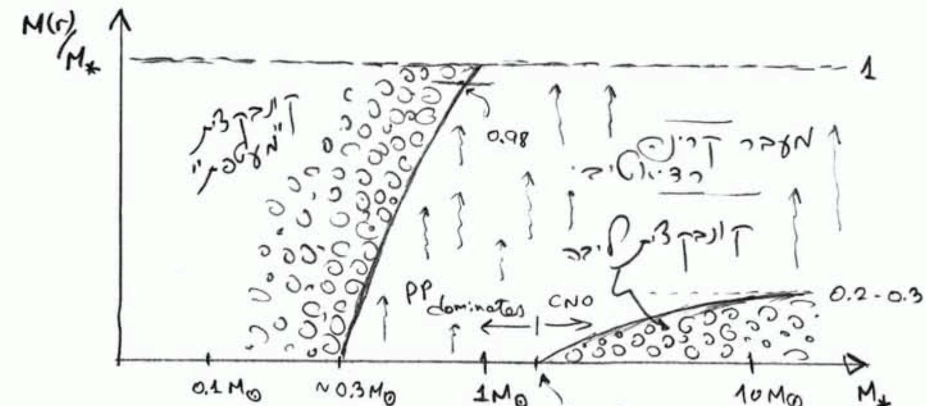
$$\frac{1}{\mu}\frac{\rho}{T^3}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\kappa_m\frac{L}{M} > \underbrace{\frac{16\pi a c G}{3}\frac{m_p}{k}}_{\text{קבועים של הטבע!}}$$

שימו לב כי ρ/T^3 זה בעצם $\rho T/T^4$ דהיינו, עד כדי קבוע היחס בין לחץ הגז ללחץ הקרינה. ראינו שבמודל אדינגטון לכוכבים, יחס זה הוא קבוע, למעשה, הוא לא משתנה יותר מדי בתוך כוכבים. לכן, נוכל לצפות את המקרים בהם תתפתח קונבקציה בכוכבים.

* במקרים בהם $\gamma \to 1$ (בהם הגרדיאנט האדיאבטי מתקרב לזה האיזותרמי), נקבל שקל מאוד לספק את הגרדיאנט האדיאבטי ולעורר קונבקציה. עדיף זה מהקרינה כאשר קיבול החום גדל מאוד כתוצאה מדרגות חופש פנימיות - כתוצאה מיינון. כאשר חומר נמצא בתחום טמפרטורה בו הוא מתיינן שינוי קטן בטמפ' גורר שינוי גדול ביינון ולכן דורש הרבה אנרגיה.

* אם האופסיות κ גדולה מאוד, קשה להעביר את האנרגיה ע"י קרינה כי ידרוש גרדיאנט טמפ' גדול מדי. התוצאה - קונבקציה. אופסיות גדולה מופיעה בדר"כ בטמפ' נמוכות יחסית כאשר חלק ניכר מהחומר לא מיונן כך שתהליכים אטומיים חשובים. זוהי הסיבה העיקרית מדוע כוכבים "קרים" (דהיינו, אדומים יותר מהשמש) הם בעלי מעטפת קונבקטיבית.

* סיבה שלישית להופעת קונבקציה היא $\frac{L(r)}{M(r)}$ גדול מאוד. בכוכבים בהם יצור האנרגיה הגרעינית מרוכז במרכז כי הוא רגיש מאוד לטמפ', ניתן לקבל את רוב הקרינה שהכוכב מאיר כמעט ללא מסה. בכוכבים של הסדרה הראשית שמסיביים יותר מהשמש, ראקציות מסוג CNO (שריפת מימן ע"י CNO כקטליזטור) נהיות חשובות ועבורן הרגישות לטמפ' גבוהה מאוד ($\propto T^{20}$ ולא T^5 כמו pp בשמש).



קונבקציה בכוכבים של הסדרה הראשית.

במסות קטנות - אופסיות גבוהה במעטפת

במסות גדולות - L/M גבוה כתוצאה מ- CNO.

השטף המקסימלי הניתן להעברה ע"י קונבקציה.

ברוב המקרים בטבע בהם מתפתחת קונבקציה, היא מאוד יעילה כך שהגרדיאנט טמפ' לא עובר את הגרדיאנט האדיאבטי, אלא רק במעט מאוד. אולם במספר מקרים מעניינים, הקונבקציה מגיעה לרוויה. נעריך כעת את השטף המקסימלי.

השטף המקסימלי שניתן להעביר ע"י קונבקציה מתקבל מקונבקציה בה האלמנטים נעים במהירות המקסימלית האפשרית שהיא מהירות הקול. הסיבה היא שבגזים שבו מתקרבים למהירות הקול מתחילים להווצר גלי הלם הגורמים לדיסיפציה חזקה שלא מאפשרת לאלמנטים להאיץ ולהגיע למהירות גדולות יותר.

כמו כן, כמות החום המקסימלית שניתן להעביר היא מסדר גודל של C_pT [קיבול החום ליח' מסה].
אולם, כמות החום ליח' מסה היא מסדר גודל של המהירות התרמית של החלקיקים, בריבוע.
שהיא מהירות הקול.

לכן, שטף האנרגיה המקסימלי:

$$F_{max} \sim \overbrace{\rho}^{\text{כדי לקבל ליח' נפח}} \cdot \underbrace{c_s^2}_{\text{כמות החום ליח' מסה}} \cdot \underbrace{c_s}_{\text{כדי לקבל שטף מכפילים,}}$$

סה"כ נקבל:

$$L_{max} = 4\pi r^2 F_{max} \sim 4\pi r^2 \rho c_s^3$$

עבור הקצה העליון של השמש, בתחתית הפוטוספירה:

$$\rho \sim 10^{-6}\ gr/cm^3$$

$$T \sim 5800^\circ K \rightarrow c_s \simeq 5\times10^5\ cm/sec$$

$$L_{max} \cong 4\pi \cdot (7\times10^{10}\ cm) \cdot 10^{-6}\ gr/cm^3 \cdot (5\times10^5\ cm/sec)^3$$

$$\simeq 10^{34}\ erg/sec \sim few\ L_\odot$$

אנו רואים שבקצה העליון של השמש קונבקציה עדיין יכולה להסיע את האנרגיה הדרושה ואולם – הגרדיאנט יהיה כבר בעל תיקון סופר-אדיאבטי לא זניח!

תאוריית ה- Mixing Length Theory לקונבקציה

ננסה כעת לתאר מה קורה כאשר הגרדיאנט הוא סופר אדיאבטי, בפרט להעריך בכמה סופר-אדיאבטי הוא באמת צריך להיות על מנת שהקונבקציה תעביר וכן מהן המהירויות האופייניות שמתקבלות.

הדבר הבסיסי שיש להשתמש בתיאור קונבקציה הוא המרחק האופייני l שאלמנט מסה יכול לעבור בין מתי שהוא מתחיל להאיץ לבין מתי שהוא מתפרק, ומשחרר את החום שלו לסביבה. היות ובדרך אין אף גודל אופייני חוץ מאשר ה- Scale height, אנו נצפה שהגודל האופייני של "מערבולות", של האלמנטים ושל המרחק שהם עוברים יהיה גודל זה גם כן:

$$l \approx H = \frac{kT}{\mu m_p g} = \frac{C_T^2}{g}$$

מהירות הקול האיזותרמית

הפרש הטמפ' האופייני אותו יפתח האלמנט יהיה:

$$\Delta T \approx \frac{l}{2}\left(\frac{dT}{dr}\Big|_{*} - \frac{dT}{dr}\Big|_{ad}\right)$$

כי בתחילת הדרך האלמנט באותה טמפ' כמו הסביבה.

זאת מכיוון שהאלמנט עולה למעלה אדיאבטית ואילו הסביבה יחסית לאלמנט מתקררת לפי הגרדיאנט בפועל של הכוכב.

בדרך דומה, ניתן לרשום עבור הצפיפות ש-

$$\Delta\rho \approx \rho\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{\rho}{T}\frac{l}{2}\left(\frac{dT}{dr}\Big|_{*} - \frac{dT}{dr}\Big|_{ad}\right)$$

שימו לב ש- $\delta\rho$ ישנה תרומה מ- ΔT ותרומה מ- Δp אולם אנו מניחים שקונבקציה נעשית על סקלת זמן ארוכה יחסית לזמן הדרוש לגלי קול לעבור מרחק הידרוסטטי – דהיינו הזמן שלוקח ללחץ להתאזן. לכן, לא תהיה תרומה מ- Δp.

הכח שיפעל על האלמנט (בעל נפח V) יהיה בקירוב: (כח הציפה).

כח – $$F \simeq \underbrace{V}_{\text{נפח האלמנט.}} g\,\Delta\rho \simeq V g \rho \frac{\Delta T}{T} \simeq \frac{V\rho g l}{T\cdot 2}\left(\left|\frac{dT}{dr}\right|_* - \left|\frac{dT}{dr}\right|_{ad}\right)$$

נניח כי העבודה הופכת לאנרגיה קינטית (וחצי ממנה הולכת לאיבוד בהולכת חום).

$$\underbrace{l\cdot F}_{\text{עבודה לאורך } l} \simeq \frac{1}{2} m v^2 \simeq \frac{1}{2} V \rho v^2$$

ולכן:

$$v^2 \simeq \frac{2 l\cdot F}{V\rho} \simeq \frac{2 l V \rho g l}{2 V \rho T}\left(\left|\frac{dT}{dr}\right|_* - \left|\frac{dT}{dr}\right|_{ad}\right)$$

והממוצע של המהירות יהיה:

$$\bar{v} \simeq \frac{l}{2}\left(\frac{g}{T}\right)^{1/2}\left(\frac{dT}{dr}\Big|_* - \frac{dT}{dr}\Big|_{ad}\right)^{1/2}$$

נחשב את השטף הקונבקטיבי:

המהירות הממוצעת קטנה יותר.

$$F_{conv} \cong C_p \rho \bar{v}\, \overline{\Delta T} \simeq \frac{C_p \rho l^2}{4}\left(\frac{g}{T}\right)^{1/2}\left(\frac{dT}{dr}\Big|_* - \frac{dT}{dr}\Big|_{ad}\right)^{3/2}$$

את השטף הקונבקטיבי ניתן לכתוב גם בדרך מעט אחרת:

$$\frac{dT}{dr} = T\frac{d\ln T}{dr} = T \underbrace{\frac{d\ln T}{d\ln P}}_{\substack{\equiv \nabla \\ \text{נסמן בעזרת נבלה}}} \underbrace{\frac{d\ln P}{dr}}_{\substack{1/H \\ \text{scale height}}}$$

בעזרת סימון זה:

$$F_{conv} \simeq \frac{1}{2} C_p \rho \bar{v} \frac{l}{H} T\left(\nabla_* - \nabla_{ad}\right)$$

$$\simeq \frac{1}{4}\frac{C_p \rho l^2 g^{1/2} T}{H^{3/2}}\left(\nabla_* - \nabla_{ad}\right)^{3/2}$$

במקרה הכללי, אם כן, חישוב הגרדיאנט יהיה מסובך יותר.

נוח לרשום

$$F_{rad} = \frac{16\sigma T^3}{3\kappa}\frac{dT}{dr} = \frac{16\sigma T^4}{3\kappa H}\nabla_*$$

ולכן השטף הכולל יהיה:

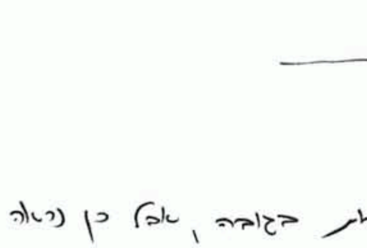
$$F_{TOT} \simeq \frac{16\sigma T^4}{3\kappa H}\nabla_* + \frac{1}{4}\frac{C_p \rho l^2 g^{1/2} T}{H^{3/2}}\left(\nabla_* - \nabla_{ad}\right)^{3/2}$$

עבור כמובן $\nabla_* > \nabla_{ad}$

תדירות Brunt-Väisälä

לא נפתור את בעית הבלה המלאה בתווך עם גרדיאנט צפיפות בגובה, אבל כן נראה כיצד ניתן יחסית בקלות לראות כיצד מתקבלות תנודות של חומר בתווך עם $\vec{g}$.

ניקח את אלמנט ונזיז אותו ממקומו המקורי.



היות והצפיפות שלו לא תהיה כמו הסביבה יפעל עליו כח שמאיץ אותו. משוואת התנועה להסחה ξ תהיה:

דיוק = בסדר מוביל → $$\rho_b\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right) \simeq -g\left(\underbrace{\rho_b}_{\text{blob} = ad} - \underbrace{\rho_a}_{\text{atmosphere} = *}\right)$$

עבור הסחות קטנות:

$$\rho_b(\xi) = \rho_0 + \left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{ad}\xi$$
$$\rho_a(\xi) = \rho_0 + \left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{*}\xi$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -g\left(\frac{\rho_b-\rho_a}{\rho_b}\right) \simeq -\left(\frac{g}{\rho}\right)\left(\left.\frac{\partial\rho}{\partial z}\right|_{ad} - \left.\frac{\partial\rho}{\partial z}\right|_{*}\right)$$

מתקבלת תדירות:

$$\omega_{BV}^2 = \frac{g}{\rho}\left(\left.\frac{\partial\rho}{\partial z}\right|_{ad} - \left.\frac{\partial\rho}{\partial z}\right|_{*}\right)$$

עבור $\omega_{BV}^2 > 0$ ישנן תנודות, עבור $\omega_{BV}^2 < 0$, מתפתחת דינמיקה על סקלת זמן של $|\omega_{BV}|^{-1}$.

בשמש:

כמו מטוטלת עם אורך באורך ה-scaleheight

$$\omega_{BV} \sim \sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow \underbrace{P}_{\text{זמן מחזור של תנודות}} \simeq 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \sim 6\sqrt{\frac{10^6\,cm}{1000\,cm/sec^2}} \simeq 180\,sec \sim 3\,min$$