ספיחה ספרית - Bondi Accretion

נסתכל כעת על בעית הספיחה הספרית שנקראת גם ספיחת בונדי:
(ע"ש הוגה שפתר אותה לראשונה). אותם המשוואות, [illegible] ויתורו
עם אלו בעית הרוח התרמית מכוכבים (כמו רוח השמש).

משוואת הרציפות:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\bar\nabla\cdot(\rho\bar v)$$

משוואות התנע:

$$\rho\frac{D\bar v}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{f_{grav}}{\rho}$$

בקואורדינטות ספריות:

$$\dot\rho = -\frac{1}{r^2}\left(r^2\rho v\right)'$$

$$\dot v + v v' = -\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^{\gamma-1}\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr}\frac{P_\infty}{\rho_\infty} - \frac{GM}{r^2}$$

נשים לב שהנחנו שהגז הוא אדיאבטי כך ש-

$$\frac{P}{P_\infty} = \left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^{\gamma}$$

כדי לקבל פתרון של ספיחה, נניח סטציונריות (steady state)
דהיינו, שיכולים להיות מהירויות אך לא שינויים שלהן בזמן $\partial/\partial t \to 0$

לכן, ניתן לכתוב:

$$\dot M = 4\pi r^2 \rho v$$

שזה תוצר של אינטגרציה של משוואת הרציפות:

$$r^2\rho v = const = \frac{\dot M}{4\pi}$$

נגזור משוואה זו לפי r ונקבל:

$$2r\rho v + r^2\frac{\partial\rho}{\partial r}v + r^2\rho\frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

נקבל:

$$\frac{\partial\rho}{\partial r} = -\frac{\rho}{v}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2\rho}{r}$$

נציב במשוואת התנע ונקבל:

$$v\frac{\partial v}{\partial r} = +\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^{\gamma-1}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\frac{P_\infty}{\rho_\infty} - \frac{GM}{r^2}$$

או אחרי העברת אגפים:

$$\left(v - \left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^{\gamma-1}\frac{P_\infty}{\rho_\infty}\frac{1}{v}\right)\frac{\partial v}{\partial r} = 2\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^{\gamma-1}\frac{P_\infty}{\rho_\infty}\frac{1}{r} - \frac{GM}{r^2}$$

זוהי משוואה שפתרונה נותן את $v(r)$. היא מעט מורכבת. כדי לראות ולהבין את הפתרון בצורה שקופה יותר, נסתכל על המקרה בו הגז יכול להתקרר ושומר על טמפ' קבוע - המקרה האיזותרמי: $P = c_T^2\rho$

במקרה זה נקבל:

$$(*)\qquad \left(v - \frac{c_T^2}{v}\right)\frac{dv}{dr} = \frac{2c_T^2}{r} - \frac{GM}{r^2}$$

כדי להבין איך נראה הפתרון, נשים לב ש- $\frac{2c_T^2}{r} - \frac{GM}{r^2}$ מחליף סימן ב- $r \sim \frac{GM}{2c_T^2}$. ברדיוס קטן, הביטוי שלילי, אך הוא חיובי ברדיוסים גדולים.

* אם אנחנו מחפשים פתרון של ספיחה, אזי ה- v שלנו שלילי. בגודל הוא קטן ב-∞ ואילו ברדיוסים קטנים הוא מאד שלילי. לכן $\frac{dv}{dr} < 0$.

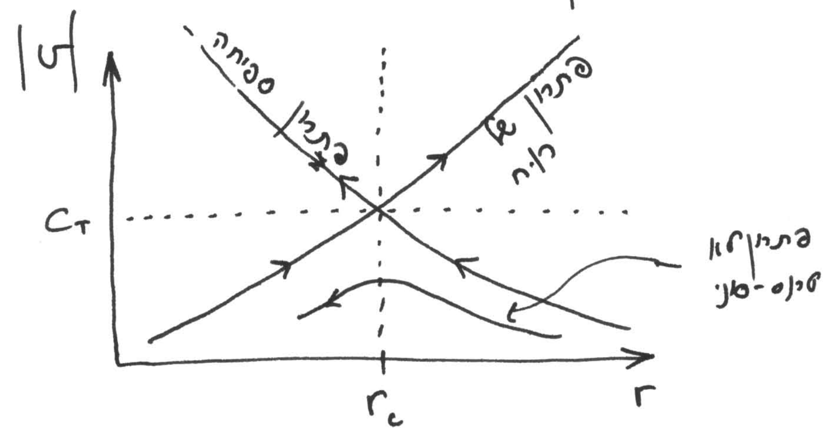
* אם אנחנו מחפשים פתרון של רוח, אזי v מתחיל מ-0 ברדיוסים קטנים והוא גדל, לכן כאן $\frac{dv}{dr} > 0$.

היות ו- $\frac{dv}{dr} > 0$, והאגף הימני של $(*)$ מחליף סימן, גם האיבר $v - \frac{c_T^2}{v}$ צריך להחליף סימן, באותו המקום!

צד ימין הוא הכח. הנקודה בה הר"ח הכולל מתאפס נקראת
הנקודה הקריטית. צד שמאל מחליף סימן בנקודה בה $v=c_T$

דהיינו, כאשר המהירות עוברת את מהירות הקול, כלו' בנקודה הסונית.

זוהי תכונה כללית – כדי לקבל פתרון טרנס סוני, הנקודה הקריטית חייבת להתלכד עם הנקודה הסונית.



r_c היא הנקודה הקריטית עבורה $\frac{2c_T^2}{r_c}-\frac{GM}{r_c^2}=0$.

כלומר:
$$r_c = \frac{GM}{2c_T^2}$$

שימו לב שהנקודה הקריטית היא מאותו הסדר גודל של הרדיוס ממנו מהירות הבריחה שווה למהירות הקול.

בנקודה הקריטית, כאמור, המהירות שווה למהירות הקול: $v=c_T$

עובדה זו מאפשרת לנו לחשב את קצב הספיחה כתלות בצפיפות באותו הרדיוס:

$$\dot{M} = 4\pi r_s^2 \rho_s c_T$$

אלא שאנו לא יודעים מהי הצפיפות! יש למצוא אותה ע"י קישורה לצפיפות ב-∞. נעשה זאת ע"י האינטגרל של משוואות התנועה:

ה

$$\frac{v^2}{2} + \int_{P_\infty}^{P} \frac{dP}{\rho} - \frac{GM}{r} = const$$

נציב שוב את הקשר בין P ל-ρ עבור גז איזותרמי:

$$\frac{v^2}{2} + \int_{P_\infty}^{P} c_T^2 \frac{d\rho}{\rho} - \frac{GM}{r} = const$$

ולאחר אינטגרציה:

$$\frac{v^2}{2} + c_T^2 \left(\ln\rho - \ln\rho_\infty\right) - \frac{GM}{r} = 0$$

בנקודה הסונית יש לנו:

$$\frac{c_T^2}{2} + c_T^2 \left(\ln\rho_s - \ln\rho_\infty\right) - \frac{GM}{r_s} = 0$$

אז:

$$\rho_s = \rho_\infty \exp\left(2 - 1/2\right)$$

כי: $r_s = \frac{GM}{2c_T^2}$ כאמור.

נציב את ρ_s במשוואה עבור $\dot{M}$:

$$\dot{M} = 4\pi \left(\frac{GM}{2c_T^2}\right)^2 \rho_\infty \exp(3/2)\, c_T$$

$$= 4\pi \underbrace{\left(\frac{\exp(3/2)}{4}\right)}_{=1.12} \rho_\infty \frac{(GM)^2}{c_T^3}$$

אילו היינו פותרים עבור גז אדיאבטי עם $\gamma = 5/3$, היינו מוצאים שהפקטור לא שווה ל-1.12 אלא ל-0.25

את הפתרון עבור הגז תראו בתרגול.