גלי קול

נסתכל על הפרעות קטנות בנוזל שהוא דחיס :

$p = p_0 + p'$; $\rho = \rho_0 + \rho'$

$v = \underbrace{v_0}_{\text{אין}} + v'$

משוואת הרציפות תהיה:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot((\rho_0 + \rho')\vec{v}') = 0$$

אם שומרים רק איברים מסדר ראשון, מקבלים:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{v}' = 0$$

באותה דרך, משוואת אוילר נראית:

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v}'\cdot\vec{\nabla})\vec{v}'}_{\substack{\text{אין סדר 0} \\ \text{1 אין}}} = -\frac{1}{\rho}\underbrace{\nabla p}_{\text{אין סדר 0}} \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p'$$

כעת, כדי לסגור את סט המשוואות, צריך משוואה שמקשרת בין הלחץ לבין הצפיפות. משוואה זו תתקבל ממשוואת האנרגיה. אם למשל מניחים שהנוזל אידאלי, אין מקורות חום, נקבל $s = const$, דהיינו נוזל אדיאבטי. ואז:

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \rho'$$

נציב במשוואת הרציפות:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \vec{\nabla}\cdot\vec{v}' = 0$$

נפעיל גרדיאנט בשני האגפים, ונקבל:

$$\underbrace{\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} p'}_{-\frac{\partial^2}{\partial t^2}v'} + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}') = 0$$

את $\vec{v}$ ניתן לרשום כסכום רכיב רוטציוני ורכיב הנגזר מפוטנציאל סקלרי:

$$v = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\phi$$

מה קורה לרכיב הרוטציוני?

הרכיב הרוטציוני יקיים:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\bar{\nabla}\times\bar{A}) = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \vec{\nabla}\big(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{A})}_{=0}\big)$$

דהיינו, איננו מקבלים מרכיב זה $\nabla\times A$ שהוא קבוע (עד כדי פונקציה ליניארית
שתלויה בזמן ובמקום קשורה כלל לגלים... ולכן לא מעניינת כאן בכלל).

מה שנשאר הוא הרכיב שנגזר מפוטנציאל סקלרי. רכיב זה יקיים את משוואת הגלים:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}_{c^2}\Delta\phi\right) = 0$$

ז.א. גרדיאנט של משוואת גלים לכן ϕ מקיימת את משוואת הגלים.

אנו רואים כי מהירות הקול היא:
$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \longrightarrow p' = c^2\rho'$$

למשוואת הגלים פתרונות ידועים. למשל, ב- 1D:

$$\phi = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$$

f_1 מתאר גל שנע ימינה ו- f_2 גל שנע שמאלה.

$$v' = \frac{\partial\phi}{\partial x} = f_1'(x-ct) + f_2'(x-ct)$$

נציב במשוואת הרציפות:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial v'}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} = -\rho_0 f_1''(x-ct) - \rho_0 f_2''(x-ct)$$

$$\rho' = \frac{\rho_0}{c}f_1'(x-ct) - \frac{\rho_0}{c}f_2'(x-ct)$$

עבור גל שנע ימינה: $\rho' = \frac{\rho_0}{c}v'$

עבור גל שנע שמאלה: $\rho' = -\frac{\rho_0}{c}v'$

בשלושה מימדים, ניתן להגדיר למשל גל מישורי:

$$\phi = \mathrm{Re}\left\{ A \exp\left(i\, \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t \right) \right\}$$

$\vec{k}$ הינו הוקטור גל. אם מציבים במשוואת הגלים, נקבל את יחס הדיספרסיה:

$$\omega = c\,|\vec{k}|$$

אנרגיה ותנע של גל אקוסטי.

האנרגיה הכוללת, ליח' נפח, בגל היא:

אנרגיה פנימית ליח' מסה

$$\underbrace{e}_{} = \rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho \underbrace{v^2}_{}$$

אנרגיה ליח' נפח.

אנרגיה קינטית ליח' מסה.

נפתח פיתוח עד סדר שני (בגלים, האנרגיה יחסית לאמפליטודה בריבוע, ולכן, נצפה שגם בגלים אקוסטיים כך יהיה).

$$e = \rho_0\varepsilon_0 + \rho' \left.\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0} + \frac{1}{2}\rho'^2 \left.\frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho^2}\right|_{\rho=\rho_0} + \frac{1}{2}\rho_0 v^2$$

את הנגזרות יש לקבל בתנאים של הגל, כלומר, תחת התנאי $s=\text{const}$.

השינוי באנרגיה הפנימית:

נפח של יח' מסה

$$d\varepsilon = T\,ds - p\,dV = T\,ds + \frac{p}{\rho^2}\,d\rho$$

לכן:

$$\left.\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho}\right|_s = \varepsilon + p/\rho = \underbrace{h}_{\text{enthalpy}}$$

האנטלפיה

אולם:

$$dh = T\,ds + V\,dp = T\,ds + \frac{dp}{\rho}$$

לכן:

$$\left.\frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho^2}\right|_s = \left.\frac{\partial h}{\partial\rho}\right|_s = \underbrace{\left.\frac{\partial h}{\partial p}\right|_s}_{=1/\rho} \underbrace{\left.\frac{\partial p}{\partial\rho}\right|_s}_{c^2}$$

סה"כ נקבל:

אנרגית מנוחה. לא מעניין.

$$e = \overbrace{\rho_0\varepsilon_0} + \underbrace{h_0\rho'}_{0 = \text{בממוצע}} + \frac{1}{2}\frac{c^2\rho'^2}{\rho_0} + \frac{1}{2}\rho_0 v^2$$

האנרגיה הכללית בגל:

$$E = \int e\,dV = \int\left(\frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2\rho_0}c^2\rho'^2\right)dV$$

עבור גל מישורי, ראינו כי: $\rho' = \frac{\rho_0}{c}v$ ולכן: $e = \rho v^2$

דהיינו, יש את אותה האנרגיה בשני הרכיבים של הגל - האנרגיה הפנימית והאנרגיה קינטית.

בשבוע שעבר, ראינו את משוואת האנרגיה שהיא מהצורה:

$$\iiint e\,dV = -\oiint \vec{v}\underbrace{\left(\rho\frac{v^2}{2} + \rho h\right)}_{\vec{q}_E} d\vec{s}$$

ז"א. שטף האנרגיה הוא:

$$\vec{q}_E = \vec{v}\left(\rho\frac{v^2}{2} + \rho\varepsilon + p\right)$$

נפתח את q_E בצורה דומה לפיתוח עבור e:

$$\vec{q}_E \approx \vec{v}\rho h\Big| = \underbrace{\vec{v}\rho_0 h_0} + \underbrace{\vec{v}\rho_1 h_0} + \vec{v}\rho_0 \underbrace{h_1}_{\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s\rho'}$$

כדי סדר ראשון   עד סדר שני

$$= \vec{v}\rho\cdot h_0 + \vec{v}\underbrace{c_s^2\rho'}_{p'} \qquad \underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s}_{1/\rho_0}\underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s}_{c_s^2}\rho'$$

האיבר הראשון מתאפס אם מבצעים אינטגרציה על נפח גדול:

$$\iint \vec{q}_E\Big|_{1} d\vec{s} = h_0\iint \vec{v}\rho = h_0\iiint\nabla\cdot(\rho\vec{v}) = h_0\underbrace{\iiint\frac{\partial\rho}{\partial t}dV}_{\text{משמור מסה} \to 0.}$$

איבר ראשון

דהיינו, האיבר הראשון אינו תורם לנטו שטף אנרגיה ומה שנשאר איתנו הוא:

סה"כ נקבל

$$\vec{q}_E = \vec{v} c_s^2 \rho' = \vec{v} p'$$

תנע בגל:

התנע הוא (צפיפות תנע ליח' נפח):

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \rho_0 v + \rho' \vec{v}_0$$

אם הגל מוגדר רק באיזור מסוים נרשום: $v = \bar{\nabla}\phi$

1- $\phi = 0$ מחוץ לאותו איזור. התנע הכולל יהיה:

$$\vec{J} = \iiint \vec{j}\, dv = \underbrace{\iiint \rho_0 \bar{\nabla}\phi\, dV}_{\iint \rho_0 \phi\, d\vec{S}} + \iiint \underbrace{\rho'}_{\frac{1}{c^2}p'} \bar{v}\, dV = \frac{1}{c^2}\int \vec{q}_E\, dV$$

אם נבצע את האינטגרציה מחוץ לאיזור בו הגל קיים, נקבל $=0$.

ז"א. יש בגל נטו תנע. שטף התנע הממוצע יהיה:

$$\bar{\dot{j}} = \frac{\vec{q}_E}{c^2} \qquad \vec{q}_j = c\,\dot{\vec{j}} = \frac{\vec{q}_E}{c}$$

קרינת גלי קול

ראינו את משוואת הגלים:

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

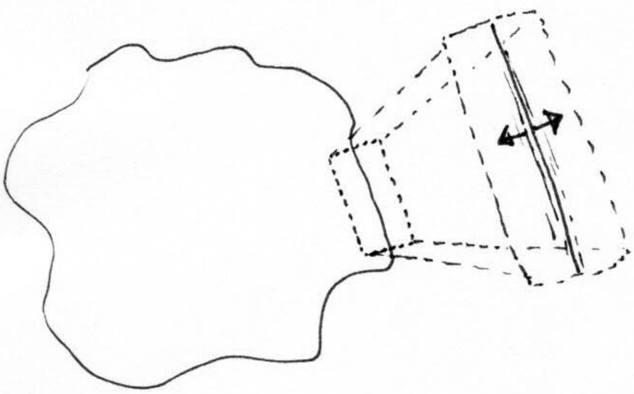
תנאי השפה שלו, על פני הגוף שמקרין את גלי הקול:

$$\underbrace{u_n}_{\text{מהירות נורמלית נתונה.}} = \frac{\partial\phi}{\partial n}$$

[נגזרת בכיוון נורמלי לשפה.]

נבחן כעת שני גדלים: $\underbrace{\lambda}_{\text{אורך גל}} \ll \overset{\text{גודל גוף}}{l}$ ו- $l \ll \lambda$

$\underline{\lambda \ll l}$: במקרה זה, נוכל להסתכל על כל אלמנט קטן מהגוף שמקרין את הגלים כמקור לגלים מישוריים.



כל אלמנט יוצר שטף אנרגיה של:

$$q_E = c\rho v^2$$

לכן, איבוד האנרגיה הכולל יהיה:

$$I = c\rho \oint u_n^2\, ds$$

$\underline{l \ll \lambda}$: במקרה זה, כל חלקי הגוף רואים את אותה הפאזה של הגל, וניתן להזניח את האיבר $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ בתנאי השפה:

$$\underbrace{\Delta\phi}_{l^{-2}\phi} \quad : \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

$$l^{-2}\phi \qquad \underbrace{\frac{1}{c^2}\omega^2}_{\lambda^{-2}}\phi$$

איבר הרבה יותר קטן!

כלומר, אנו צריכים לפתור את הבעיה $\Delta\phi = 0$ על פני הגוף.

ע"י קירוב מולטיפולי, הפוטנציאל ליד הגוף יהיה:

$$\phi = -\frac{a}{r} - \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) + \dots$$

אנו שומרים על שני האיברים הראשונים היות והם הכי מעניינים.

היות ומדובר במשוואות הגלים, במרחקים גדולים נראה את ה- retarded potential :

$$\phi = -\frac{a(r-ct)}{r} + \underbrace{\dot{\vec{\nabla}}\left(\frac{A(r-ct)}{r}\right)}_{\text{הסבר עוד מעט}} + \dots$$

כדי שהסימן של $\vec{v}$ יהיה +.

כעת, נשאר למצוא למה שווה איבר המונופול, דיפול וכו'...

נסתכל על האיבר הראשון:

למה שווה שטף המסה דרך משטח כדורי גדול?

שינוי נפח הגוף

$$\rho_0\dot{V} = \oiint \vec{v}\rho_0 d\vec{s} = \oiint \frac{a\hat{n}}{r^2}d\vec{s} = 4\pi a\rho_0$$

ז"א: אם ישנו שינוי נפח לגוף הפולט נקבל איבר מונופולי:

$$a = \frac{\dot{V}}{4\pi}$$

$$\phi = -\frac{\dot{V}(r-ct)}{4\pi r}$$

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\ddot{V}}{4\pi r^2}$$

הספק הקרינה האקוסטית שנפלט

$$I = \rho c\oint \overline{v^2}\, d\vec{s}\cdot\hat{n}$$

$$= \oint \vec{q}_E\cdot d\vec{s} = \rho c\frac{\overline{\ddot{V}^2}}{c^2(4\pi r)^2}4\pi r^2 = \frac{\rho\overline{\ddot{V}^2}}{4\pi c}$$

אם ישנו שינוי נפח הרמוני, בגודל ΔV_m, בתדירות ω:

$$\overline{\ddot{V}^2} = \frac{\omega^2\Delta V_m^2}{2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\rho\omega^4\Delta V_m^2}{8\pi c}$$

מה ההכללה של הפוטנציאל הדיפולי לגל ?

$$\phi = -\vec{A}(t)\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$$

איך הביטוי נראה עבור הפוטנציאל ה"מפגר"? התשובה היא שהפוטנציאל המפגר נראה:

$$\phi = -\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{A}(r-ct)\,\frac{1}{r}\right) = -\vec{\nabla}\cdot\left(\underbrace{\hat{a}}_{\text{וקטור יחידה בכיוון } \vec{A}}\, A(r-ct)/r\right)$$

(ולא: $\left(\vec{A}(r-ct)\,\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right)$. כדי לראות זאת, נראה שאם $f(r-ct)$ פותרת את משוואת הגלים אזי גם $\vec{\nabla}\cdot\left(\underbrace{\hat{a}}_{\text{מניחים שהוא קבוע}} f(r-ct)\right) = \hat{a}\,\vec{\nabla} f(r-ct)$

במקרה שלנו $f(r-ct) = \frac{A(r-ct)}{r}$.

משוואת הגלים היא: $\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$

נציב את הפונקציה החדשה במקום f:

$$\overbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}}^{\Delta}\left(\hat{a}\cdot\vec{\nabla} f\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underbrace{\left(\hat{a}\cdot\vec{\nabla} f\right)}_{=\vec{\nabla}\cdot(\hat{a} f) \text{ כי } \hat{a} \text{ קבוע}} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\underbrace{\vec{\nabla} f\cdot\underbrace{\nabla\hat{a}}_{0 \text{ כי } \hat{a} \text{ וקטור קבוע}} + \hat{a}\,\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f}_{\Delta f}}_{\vec{\nabla}\cdot(\hat{a}\,\Delta f)}$$

אם נכניס את ה-$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ פנימה, נקבל:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\hat{a}\left[\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f\right]\right) \stackrel{?}{=} 0$$

כמובן, ה-[ ] מתאפסים, כי אם f מקיים את משוואת הגלים כי אז גם $\vec{\nabla}\cdot(\hat{a} f)$ כאשר $\hat{a}$ וקטור קבוע.

אם נבחר $f = \frac{a(r-ct)}{r}$ שהוא הפתרון המונופולי, נקבל את הפתרון הדיפולי לגל:

$$\phi = -\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{A}(r-ct)}{r}\right) = -\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{a}\,A(r-ct)}{r}\right)$$

כעת, נבחן את הפוטנציאל במרחקים גדולים מהגוף. כאשר נבצע גזירה, נקבל שני איברים:

$$\phi = \hat{a}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{A(r-ct)}{r}\right) = \hat{a}\cdot\left(\hat{r}\,\frac{\partial A(r-ct)}{\partial r}\,\frac{1}{r} - \hat{r}\,A(r-ct)\,\frac{1}{r^2}\right)$$

האיבר השני קטן עם המרחק הרבה יותר מהר מאשר האיבר הראשון.

לפיכך, במרחקים גדולים, הפוטנציאל ה"מפוזר" יראה:

$$\phi \simeq (\hat{a}\cdot\hat{r})\,\frac{\partial A(r-ct)}{\partial r}\,\frac{1}{r} \underset{\text{נעבור לגזירה בזמן}}{=} -\frac{(\hat{a}\cdot\hat{r})}{rc}\,\frac{\partial A(r-ct)}{\partial t}$$

ולמה שווה המהירות?

$$v = \vec{\nabla}\phi = -\frac{(\hat{a}\cdot\hat{r})}{rc}\,\vec{\nabla}\left(\frac{\partial A(r-ct)}{\partial t}\right) = -\frac{(\hat{a}\cdot\hat{r})}{rc}\,\hat{r}\,\frac{\partial \dot{A}(r-ct)}{\partial r}$$

$$\underset{\text{נעבור לגזירה בזמן.}}{=} +\frac{(\hat{a}\cdot\hat{r})\hat{r}}{rc^2}\,\ddot{A}$$

מה יהיה שטף הקרינה האקוסטית הכולל? נבצע אינטגרציה על כדור במרחק גדול:

$$I = \rho c_s \oint \overline{v^2}\,ds = \frac{\rho c_s}{c_s^4}\oint \underbrace{(a\cdot\hat{r})^2}_{\cos^2\theta}\,\overline{\ddot{A}^2}\,\frac{1}{r^2}\,\underbrace{r^2\,d\Omega}_{ds}$$

$$= \frac{\rho}{c_s^3}\,\overline{\ddot{A}^2}\underbrace{\oint \cos^2\theta\,d\Omega}_{2\pi\int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta\,d\theta} = \frac{4\pi}{3}\,\frac{\rho}{c_s^3}\,\overline{\ddot{A}^2}$$

אם הגוף מבצע תנועה הרמונית עם אמפליטודה קבועה אזי $A \sim u \sim a\omega$

ולכן $\ddot{A}$ יהיה יחס' ל- ω^3 והקרינה יחסית ל- ω^6!

נסתכל על דוגמא ספציפית.

בעבר פתרנו את הבעיה סביב גוף כדורי הנע במהירות u

ומסית $r - \infty$. קבלנו כי הקבוע בפוטנציאל הינו:

$$\vec{A} = \frac{\vec{u}(t)\, R^3}{2}$$

אם הגוף מבצע תנודה עם אמפליטודה a אז: $u = \omega a \cos \omega t$

$$\dddot{A} = -\omega^3 a \cos \omega t$$

$$\overline{\dddot{A}^2} = \frac{\omega^6 a^2}{2} \longleftrightarrow \overset{\text{כי}}{\overline{\cos^2 \omega t} = 1/2}$$

סה"כ נקבל:

$$I = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho}{c_s^3} \frac{\omega^6 a^2 R^6}{8} = \frac{\pi}{6} \frac{\rho}{c_s^3} \omega^6 a^2 R^6$$

אם נקח כדור ברדיוס 1cm המבצע תנודות של 1mm ובתדירות 1000Hz:

$R = 1\,cm \quad a = 1\,mm \quad f = 1000\,Hz \quad C_s = 300\,m/s$

$$I = \frac{\pi \; 1.2\times10^{-3}\,gr/cm^3}{6\,(3\times10^4\ cm/sec)^3} \left(2\pi\cdot 1000\,1/s\right)^6 10^{-1}cm^{-1} (1\,cm)^6$$

$$= 3\times10^4 \frac{erg}{sec} = 0.003\,W$$

במרחק של מטר, עוצמת הקול תהיה הממוצעת

$$F = \frac{I}{4\pi r^2} = \frac{3\times10^{-3}\,W}{4\pi\cdot 1^2\,m^2} \simeq \underset{\times 10^{-3}}{0.25} \frac{W}{m^2}$$

בכיוון מסוים, העוצמה תהיה פי 3 יותר גדולה מהממוצע, ובניצב, העוצמה תהיה 0!

בעזרת ההגדרה של db אקוס׳:

$$db\text{-ב } F \equiv 120 + 10\log_{10}\left(F/(W/m^2)\right) = 120 + \underbrace{10\log_{10}\left(0.25\times10^{-3}\right)}_{-30-3-\underbrace{3}_{\text{פקטור 2 זה 3db}}}$$

$$\simeq 74\ db$$