מעבר חום

נתחיל עם משוואת שימור האנרגיה, אותה כבר ראינו כאשר בחנו את נושא הצמיגות:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\Big(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\underbrace{\overbrace{\varepsilon}^{\text{אנרגיה פנימית ליח' מסה}}}_{\text{}}\Big)dV = -\oiint \vec{v}\cdot\Big(\frac{1}{2}\rho\vec{v}+\rho\varepsilon\Big)\cdot d\vec{s} - \underbrace{\oiint P\vec{v}\cdot d\vec{s}}_{\text{עבודת הצפנות}}$$

אנרגיה ליח' נפח

$$= -\oiint \vec{v}\cdot\rho\Big(\frac{v^2}{2}+\underbrace{\varepsilon+P/\rho}_{h}\Big)d\vec{s}$$

אנטלפיה ליח' מסה h

היות והאינטגרל לא תלוי בנפח V אותו אנחנו בוחרים, והיות וניתן להפוך את האינטגרל המשטחי לאינטגרל נפחי בעזרת חוק הדיברגנס, נקבל:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\Big) = -\vec{\nabla}\cdot\Big(\rho\vec{v}\big(\frac{1}{2}v^2+h\big)\Big)$$

זוהי משוואת האנרגיה עבור גז שהוא אדיאבטי. כלומר, כל אלמנט אינו מחליף חום עם אלמנטים אחרים או עם הסביבה. אולם, יתכן מעבר חום, יצירת חום וכו'. אותם אנו צריכים לקחת בחשבון.

באופן כללי, שטף החום נתון ע"י: $q = -k\bar{\nabla}T$

כאשר k הוא מקדם ההולכה. למשוואה זו הדעה פוריה.

נוכל גם להוסיף מקורות חום. אם $\dot{e}$ הוא מקור חום ליחידת מסה, $\dot{e}\rho$ תהיה התרומה ליח' נפח. תרומה כזו יכולה לבוא למשל מריאקציות כימיות, גרעיניות, איבוד אנרגיה לקרינה וכו'...

ולאחרון חביב, יש להוסיף את העבודה שעושה כח החיכוך. אם $\bar{\bar{\sigma}}$ הוא הכח החיכוך אזי איבוד החום מהמשטח $d\vec{s}$ יהיה

$$\bar{q}_v\cdot d\vec{s} = \underbrace{\vec{V}\cdot\bar{\bar{\sigma}}}_{\bar{q}_v}\cdot d\vec{s}$$

סה"כ נקבל:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\Big) = -\bar{\nabla}\cdot\Big(\rho\vec{v}\big(\frac{1}{2}v^2+h\big)-\bar{V}\cdot\bar{\bar{\sigma}}-k\bar{\nabla}T\Big)+\rho\dot{e}$$

הסימן של $\bar{V}\cdot\bar{\bar{\sigma}}$ הפוך מ-P/ρ בתוך ה-h היות ולחץ הוא כח שפועל על הגאז בכיוון $-d\vec{s}$ ואילו $\bar{\bar{\sigma}}$ הוא כח שפועל על הגאז והוא מוגדר חיובי אם הוא פונה בכיוון $d\vec{s}$.

את משוואת שימור האנרגיה ניתן להפוך ל"משוואת חום" ע"י שימוש במשוואות הרציפות,

משוואות התנע (נביאר-סטוקס) כדי לקבל:

אנטרופיה ליח' נפח.

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})s\right)=\sigma'_{ik}\cdot\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\vec{\nabla}\cdot(\kappa\vec{\nabla}T)+\rho\dot{e}$$

(כיוון, לאחר השימוש בקשר ש- $d\varepsilon=Tds-pdV$).

במקרה הפרטי בו יש לנו נוזל בעל צמיגות ניוטונית והוא בלתי דחיס, טנזור המאמץ של הנוזל יראה:

$$\sigma'_{ik}=\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)$$

ולכן, עבודת הצמיגות תהיה:

$$\sigma'_{ik}\cdot\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)=\frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2$$

זרימה איזוברית

במקרים רבים, מתרחש מעבר החום על סקלות זמן ארוכות (מעבר לזמן הדינמי בו לוקח למערכת לאזן את הלחץ). לכן, במקרים אלה ניתן להניח שהלחץ אחיד. מקרים אלה יהיו רלוונטים לנו בכל פעם שהזמן האופייני ארוך מהזמן שלוקח לקול לחצות את המערכת. שימו לב שאפילו את הנוזל בלתי דחיס לא ניתן להניח כי צפיפותו אחידה. הסיבה היא שטמפ' שונות יביאו לצפיפות שונות דרך התפשטות תרמית. במקרים מסוימים, השוני בצפיפות מכיל את כל הפיסיקה של המערכת.. לדוגמא, קונבקציה בה חומר חם, קל יותר מהסביבה, ולכן עולה ואילו חומרים קרים כבדים יותר ולכן שוקעים. נכתוב לכן:

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

כזכור מתרמודינמיקה:

$$c_p\equiv T\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p$$

נציב במשוואת החום ונקבל:

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})T\right)=\frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2+\vec{\nabla}(\kappa\cdot\vec{\nabla}T)+\rho\dot{e}$$

עבור κ קבוע (שאינו תלוי במקום או ב- T):

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})T=\frac{1}{2}\frac{\nu}{c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2+\underbrace{\frac{\kappa}{c_p\rho}}\cdot\Delta T+\frac{\dot{e}}{\rho}$$

$\chi\equiv$ מקדם דיפוזית החום של החומר (cm^2/sec).

במידה ומדובר במערכת ללא מהירות:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T + \frac{\dot{e}}{\rho}$$

כמובן שלמשוואה זו יכולנו להגיע ביתר קלות ללא השימוש במשוואת שימור האנרגיה המלאה, רק ע"י השימוש ב- $\bar{q} = k\bar{\nabla} T$.

אם מדובר במערכת שאינה תלויה בזמן, נקבל את משוואת פואסון:

$$\Delta T = -\frac{\dot{e}}{\chi \rho}$$

ואם אין אף מקורות, נקבל את משוואת לפלס:

$$\Delta T = 0$$

כל השיטות לפתרון משוואת לפלס, עליהן למדנו בעבר תקפות גם כאן!

<u>דוגמא:</u>

מהו פילוג הטמפ' סביב כדור בעל מוליכות K_1 הנמצא בתוך מרחב עם מוליכות K_2 וגרדיאנט טמפ' ב-∞ השווה ל- (∇T_∞)?

תנאי השפה למשוואת לפלס שלנו הם:

$$q|_1 = q|_2 \quad ; \quad T|_1 = T|_2$$

דהיינו:

$$K_1 \cdot \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_1 = K_2 \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_2$$

בעבר, פתרנו כמעט בדיוק את אותה משוואת לפלס עם כמעט אותם תנאי שפה עבור בעיה פוטנציאלית סביב כדור. נחליף ϕ ב- T ונקבל:

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{3K_2}{K_1 + 2K_2} (\bar{\nabla} T_\infty) \cdot \vec{r} \\[2ex] T_2 = \left[1 - \dfrac{K_2 - K_1}{K_1 + 2K_2} \left(\dfrac{R}{r}\right)^3\right] (\vec{\nabla} T_\infty) \cdot \vec{r} \end{cases}$$

דרך נוספת לפתור את משוואת החום היא ע"י שימוש בטרנספורם פורייה.

משוואת החום:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T$$

נניח למשל כי נתון תנאי ההתחלה:

$$T(\bar{r}, t=0) = T_0(\bar{r})$$

נבצע טרנספורם פוריה:

$$T(\bar{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \tilde{T}_k \exp(i\bar{k}\cdot\bar{r})\, d^3k$$

וההפכי:

$$\tilde{T}_k = \int T(\bar{r}',t)\exp(-i\bar{k}\cdot\bar{r}')\, d^3r'$$

נציב במשוואת החום:

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} = -k^2\chi T_k$$

למשוואה זו פתרון פשוט:

$$T_k(t) = T_{0k}\exp(-k^2\chi t)$$

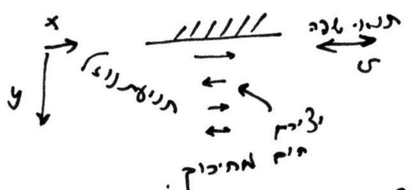
אחרי הצבת הפתרון בטרנספורם פוריה של $T_0(r)$ וביצוע טרנספורם נוסף כדי לקבל את $T(r,t)$ מקבלים:

$$T(\bar{r},t) = \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}}\int T_0(r)\underbrace{\exp\left(-\frac{(r-r')^2}{4\chi t}\right)}\, d^3r'$$

צורה סטנדרטית של מעבר החום.

<u>דוגמא נוספת:</u>

נסתכל על משטח חצי אין סופי שמתנדנד, כמו שפתרנו בתרגול. מהי התפלגות החום בזמן כלשהו לאחר תחילת התנודות?



בעיה זו מחולקת לשתיים: זרימות ויצירת חום, ומעבר חום.

משוואת N.S. רכיב $\hat{x}$:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \underbrace{\cancel{(\bar{v}\cdot\bar{\nabla})}}_{}v_x = \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)$$

אין תלות מפורשת בציר $\hat{x}$.

ננחש פתרון מהצורה:

$$v_x = v_0\exp(i\omega t - iky)$$

(שמקיים את תנאי השפה: $v_x(y=0) = v_0\exp(i\omega t)$). נציב ונקבל:

$$i\omega v_x = -\nu k^2 v_x \implies k = \pm\sqrt{i\omega\nu^{-1}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\sqrt{\omega/\nu}$$

כמובן, שיש לקחת את הפתרון שלא מתבדר עבור $y\to\infty$. בנוסף, אם ברצוננו להציב תנאי שפה ממשיים (שדרושים לנו כי נצטרך לחשב יצור חום שהוא <u>ריבועי</u> במהירות) נסכום גם את הפתרון עם ה-ω השלילי.

נקבל שהשדה מהירות הוא:

$$v_x = v_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\,y\right)\cos\left(\omega t-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\,y\right)$$

כעת, נעבור למשוואת החום:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 + \chi\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

אין רכיב מהירות בכיוון של השינויים.

אם נפתח את הסיגמה, נקבל פעמיים את האיבר $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \chi\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\nu}{c_p}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2$$

נחשב את הנגזרת:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = v_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\left[\sin\left(\omega t-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\,y\right)-\cos\left(\omega t-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\,y\right)\right]$$

ואת הריבוע:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{v_0^2\omega}{2\nu}\exp\left(-\sqrt{\frac{2\omega}{\nu}}\,y\right)\left[1-\sin\left(2\omega t-\sqrt{\frac{2\omega}{\nu}}\,y\right)\right]$$

ז.א. אני צריך לפתור את המשוואה הליניארית הלא הומוגנית:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \chi\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\nu}{c_p}\frac{v_0^2\omega}{2\nu}\exp\left(-\sqrt{\frac{2\omega}{\nu}}\,y\right)\left[1-\sin\left(2\omega t-\sqrt{\frac{2\omega}{\nu}}\,y\right)\right]$$

נכתוב את המשוואה בצורה פשוטה יותר:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \chi\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = A\exp(-\alpha y)\left[1-\sin(2\omega t-\alpha y)\right]$$

$$A \equiv \frac{v_0^2\omega}{c_p} \qquad \alpha \equiv +\sqrt{2\omega/\nu}$$

בתחילת השיעור, פתרנו את הבעיה:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

ומצאנו פתרון הכולל את פונקצית גרין של הבעיה:

$$T(y,t) = \frac{1}{2(\pi \chi t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} T_0(y') \exp\left(-\frac{(y-y')^2}{4\chi t}\right) dy'$$

אנו יכולים להשתמש במקרה שלנו בבעיה דומה, אולם במקום מקור נתון ב- $t=0$, יש לנו בכל זמן t, אוסף של מקורות שהתחילו בזמנים $\tau=t$ כאשר $0<\tau<\infty$.

כמו כן, אנו צריכים לקחת בחשבון תנאי שפה ב- $y=0$. אם נממש הטמפ' (תנאי) נחפש פתרונות המקיימים: $T(y=0)=0$. נוכל לקבלם באופן אוטומטי אם נבחר פונקצית מקור שהיא אנטי-סימטרית ביחס ל- $y=0$.

דהיינו, אנו יכולים לרשום את הפתרון לבעיה בצורת האינטגרל:

$$Q(y,t) = \begin{cases} A\exp(-\alpha y)\left[1-\sin(2\omega t-\alpha y)\right] & ; \quad y>0 \\ -A\exp(+\alpha y)\left[1-\sin(2\omega t+\alpha y)\right] & ; \quad y<0 \end{cases}$$

$$T(y,t) = \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} \int_{y'=-\infty}^{y'=+\infty} Q(y',t-\tau) \frac{\exp\left(-\frac{(y-y')^2}{4\chi\tau}\right)}{2\sqrt{\pi\chi\tau}}\, dy'\, d\tau$$

יתכן וניתן לפתור את האינטגרל אנליטית ויתכן שלא... בכל מקרה ניתן לחשבו נומרית אם צריך.