נחיר דה לבל (de Laval Nozzle)

כאשר אין כוחות חיצוניים, משוואת ברנולי נראית:

$$\frac{1}{2}v^2 + \underbrace{h}_{\int dP/\rho} = const$$

נגזור את המשוואה לפי ρ ונקבל:

$$v\frac{dv}{d\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\Big|_s = 0$$

אני מניח כי הגאז נמצא בתהליך אדיאבטי.

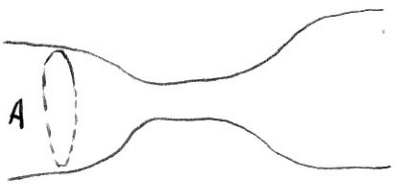
נסמן: $\frac{dp}{d\rho}\Big|_s \equiv a^2$. ו- a יחידות של מהירות ונראה בהמשך כי זו מהירות הקול (המהירות של הפרעות אדיאבטיות). לכן:

$$\frac{v\,dv}{a^2} = -\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\underbrace{\frac{v^2}{a^2}}_{M^2 \text{ :נסמן}}\frac{dv}{v} = -\frac{d\rho}{\rho}$$

$M \equiv v/a$ - נקרא מספר מאך

נסתכל כעת על נחיר:



שימור מסה נותן:

$$A\cdot\rho\cdot v = const$$

$\xrightarrow{\ln}$
$$\ln(A\cdot\rho\cdot v) = \ln(const)$$

$\xrightarrow{d()}$
$$\frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} = 0$$

$\xrightarrow{\text{מציבים}}$
$$-\frac{dA}{A} = \frac{dv}{v}\left(1 - M^2(v)\right)$$

לכן, עבור זרימה תת-קולית $(v<a)$ נקבל שהקטנת A תגדיל את המהירות אולם עבור $(v>a)$ - זרימה על-קולית הקטנת A תקטין את המהירות לכן הדרך היחידה לקבל באופן רציף מעבר מזרימה תת קולית לעל קולית היא ע"י התאמת המקום הצר של נחיר למקום בו המהירות תהיה מהירות הקול! במטוסי קרב (או טילים) יש לכן נחירים שנראים כאלה.

גלי גרביטציה:

כעת נדון בעוד דוגמא של זרימה פוטנציאלית - גלים על פני השטח של נוזל.

נשים לב כי ישנן שתי סקלות בבעיה:

a - אמפליטודת הגלים.

λ - אורך גל של הגלים.

נניח כי $a \ll \lambda$, דהיינו, גלים קטנים

מה הנחה זו אומרת לגבי האיברים במשוואת אוילר?

אם τ הוא הזמן האופייני (למשל $1/\omega$) נקבל:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{1}{\tau}$$

$$v \sim \frac{a}{\tau}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{v}{\tau} \sim \frac{a}{\tau^2} \quad ; \quad (\bar{v}\cdot\bar{\nabla})\bar{v} \sim \frac{a}{\tau}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{a}{\tau} \sim \frac{a}{\tau^2}\,\frac{a}{\lambda}$$

כלומר, האיבר הלא לינארי ← הרבה יותר קטן מאיבר ה-$\frac{\partial}{\partial t}$

לכן ניתן להזניח אותו, המשמעות היא שמשוואת אוילר נראית:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla(h + gz)$$

ניתן במקרה זה לקחת את v כנגזר מפוטנציאל, דהיינו: $v = \nabla\phi$

משוואת הרציפות לנוזל בלתי דחיס נותנת $\nabla^2\phi = 0$ ואילו משוואת אוילר נותנת את משוואת ברנולי התלויה בזמן:

h עבור נוזל בלתי דחיס

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + gz = f(t)$$

נציב במשוואת לפלס ונקבל:

$$\Delta\phi=0 \quad\rightarrow\quad f''(z)-k^2f(z)=0$$

למשוואה זו שני פתרונות:

$$f(z)=Ae^{kz}+\underbrace{Be^{-kz}}$$

לא יכול להיות היות ומתבדר עבור $z\to-\infty$

לכן:

$$\phi=Ae^{kz}\cos(kx-\omega t)$$

נציב בתנאי שפה:

$$k\phi+\frac{1}{g}(-)\omega^2\phi=0 \Rightarrow \boxed{\omega^2=kg}$$

בתרגיל נראה כי אם תנאי השפה התחתון הוא בעומק סופי, האיבר ב-ϕ עם ה-B יכול להשאר ובסוף נקבל פתרון שנראה:

$$\omega^2=gk\tanh(k\underbrace{h}_{\text{העומק}})= \begin{cases} gk & — \ kh\gg1 = \text{מים עמוקים} \\ (gh)k^2 & — \ kh\ll1 = \text{מים רדודים}\end{cases}$$

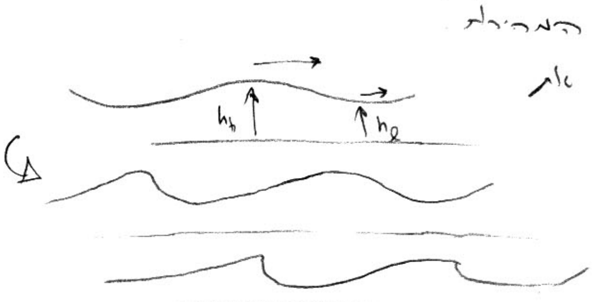
במים עמוקים, מהירות הגלים תלויה באורך גל:
אולם אינה תלויה בעומק.

$$V_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac12\sqrt{g/k}$$

במים רדודים המהירות תלויה בעומק אך אינה תלויה באורך גל
זו הסיבה שצונמי יכול לעבור את כל האוקיינוס ללא דיספרסיה ולכן
הוא יכול להיות הרסני.

גלים שנשברים בחוף, נשברים בגלל הרדות העומק:

ב- h_h הגובה גבוה והמהירות גדולה יותר
ב- h_l הגובה נמוך ואיתה המהירות
לכן שיא הגל יכול לעקוף את
המינימום ולקבל שבירה של
גל.



Tidal Bore

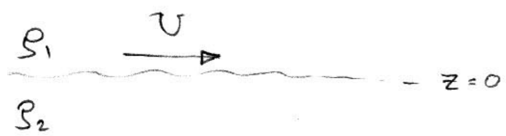
תופעה מעניינת הקשורה לגלים רדודים היא זו של ה-Tidal Bore. נהרות שנשפכים אל הים אמורים לשנות את גובהם בתלות מהגאות ושפל. אולם גל הגאות מתקדם במהירות של gh. כמו שגלי ים יכולים "להשבר" כך גם גל הגאות, אולם התנאים שלו יותר קשיחים - הזמן שלוקח לגל הגאות לעלות במעלה הנהר (עד נקודה בה לא יכול להתקדם כי לגובה הנהר זורם מהר מדי) צריך להיות קצר בהרבה 12.5 שעות מהזמן שלוקח לגל לעלות בשפל. אם הנהר זורם, אזי הזמנים מתארכים ויותר קל לקיים את התנאי. אם הגאות היא מהירה מספיק כך שגל הגאות יכול לעלות במעלה הנהר ואילו גל השפל לא, ה-tidal bore יכול להיווצר כבר בשפך הנהר.

אי יציבות קלווין הלמהולץ

נתונים שני נוזלים בלתי דחיסים, אידיאלים, בעלי צפיפויות ρ_1, ρ_2.

הנוזל העליון נע במהירות U יחסית לנוזל התחתון. מעוניינים לבדוק את

אי יציבות המערכת ע"י מציאת יחס הדיספרסיה.



מכיוון ו- $\nabla^2\phi=0$ בשני צדי הנוזל, נחפש פתרונות מהצורה:

$$\phi_1 = A_1 e^{-kz} \exp(ik_x x + ik_y y - i\omega t)$$
$$\phi_2 = A_2 e^{kz} \exp(ik_x x + ik_y y - i\omega t)$$

כדי לקיים את משוואת לפלס ברור שצריך: $k^2 = k_x^2 + k_y^2$

משוואת ברנולי התלויה בזמן נותנת: $p_1 = -\rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \rho_1 g \zeta_1 - \frac{1}{2}\rho u_1^2$

u_1 היא המהירות הכוללת של הנוזל:

מהירות לא מופרעת

$$u_1^2 = (U + v_{x,1})^2 + v_{y,1}^2 + v_{z,1}^2 \simeq U^2 + 2Uv_{x,1}$$

הפרעה

אחרי זריקת איברים ריבועיים.

כלומר:

$$P_1 = -\rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \rho_1 g \zeta_1 - \frac{1}{2}\rho_1 U^2 - \frac{2}{2}\rho_1 U v_{x,1} \quad ; \quad P_2 = -\rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \rho_2 g \zeta_2$$

תנאי שפה ראשון הוא $p_1 = p_2$, ולכן:

$$\left.\rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \rho_1 g \zeta_1 + \frac{1}{2}\rho_1 U^2 + \rho_1 U v_x = \right|_{z=0} \rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \rho_2 g \zeta_2$$

תנאי שפה שני הוא: $\zeta_1=\zeta_2$.

הפעם אנחנו לא יכולים להניח כי $v_x\sim v_z$ ושניתן להזניח את המהירות האופקית המתאימה ל-$\dot{\zeta}$:

$$v_{z,1}=\frac{d\zeta_1}{dt}=\frac{\partial\zeta_1}{\partial t}+U\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\quad ;\quad v_{z,2}=\frac{d\zeta_2}{dt}=\frac{\partial\zeta_2}{\partial t}$$

נקבל אחרי הצבת התלות $\zeta\propto\exp(ik_xx+ik_yy-i\omega t)$ כי:

$$v_{z,1}=(\omega-Uk_x)\zeta_1\quad ;\quad v_{z,2}=\omega\zeta_2$$

אולם: $\zeta_1=\zeta_2$ לכן:

$$\frac{v_{z,1}}{\omega-Uk_x}=\frac{v_{z,2}}{\omega}\rightsquigarrow\frac{1}{(\omega-Uk_x)}\frac{\partial\phi_1}{\partial t}=\frac{1}{\omega}\frac{\partial\phi_2}{\partial t}$$

כדי לקבל את המהירות סדר 0.

$$\phi_1=-A^*(\omega-Uk_x)e^{-kz}\exp(ik_xx+ik_yy-i\omega t)+\overline{U_{1,x}}$$

$$\phi_2=A^*\omega e^{+kz}\exp(ik_xx+ik_yy-i\omega t)$$

נגזור את תנאי השפה לפי הזמן, ונקבל:

$$\rho_1\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2}+\rho_1g\frac{\partial\zeta_1}{\partial t}+\rho_1U\frac{\partial v_x}{\partial t}=\Big|_{z=0}\rho_2\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2}+\rho_2g\frac{\partial\zeta_2}{\partial t}$$

אם לכל הגדלים ישנה תלות הרמונית:

$$-\rho_1\omega^2\phi_1-\rho_1gi\omega\zeta_1-\rho_1i\omega Uv_{x,1}=-\rho_2\omega^2\phi_2-i\omega g\rho_2\zeta_2$$

כעת יש לקשר את ζ_1 ל-v_1 וזאת ל-$v_{1,z}$ וזאת ל-ϕ_1 וזאת $v_{x,1}$ ל-ϕ_1.

$$\zeta_1=\frac{v_{z,1}}{-(i\omega-iUk_x)}=\frac{-k\phi_1}{-(i\omega-iUk_x)}\qquad\zeta_2=\frac{v_{z,2}}{-i\omega}=\frac{k\phi_2}{-i\omega}$$

נציב במשוואות תנאי השפה:

$$v_{x,1} = i k_x \phi_1$$

$$-\rho_1 w^2 \phi_1 - \rho_1 g \frac{-iwk}{-(iw-iUk_x)}\phi_1 - iw\rho_1 U k_x \cdot i\phi_1 = -\rho_2 w^2 \phi_2 - \rho_2 g \frac{iwk}{-iw}$$

כעת נציב את הביטויים עבור ϕ_1 ו-ϕ_2 ונצמצם ב- $A^* \exp()$:

$$+\rho_1 w^2 (w - Uk_x) + \rho_1 g w k - \rho_1 w U k_x (w - Uk_x) =$$

$$= -\rho_2 w^2 \cdot w - \rho_2 g w k$$

ב-ϕ_1 יש $-A^*$ לכן הסימן מתהפך

נצמצם ב- w, נעביר אגפים:

$$(\rho_2+\rho_1) w^2 - \rho_1 w U k_x + \rho_1 w U k_x + \rho_1 U^2 k_x^2 = (\rho_2 - \rho_1) g k$$

אחרי סידור איברים נקבל:

$$w^2(\rho_1+\rho_2) + w(-2Uk_x\rho_1) + (-(\rho_2-\rho_1)kg + k_x^2 U^2 \rho_1) = 0$$

אם נגדיר $\alpha_i = \frac{\rho_i}{\rho_1+\rho_2}$ נקבל:

$$w = k_x \alpha_1 U \pm \sqrt{gk(\alpha_2-\alpha_1) - k_x^2 \alpha_1 \alpha_2 U^2}$$

עבור כל מהירות $U \neq 0$ נקבל שישנם k שעבורם w נהיה מדומה.
(דהיינו, הפרעות שגדלות וקטנות אקספוננציאלית עם הזמן).

עבור $\vec{k}$ שמקיים

$$\begin{cases} k_x^2\,\alpha_1\alpha_2 U^2 > gk(\alpha_2-\alpha_1) & ;\quad \alpha_2>\alpha_1 \\ \text{תמיד} & ;\quad \alpha_1<\alpha_2 \end{cases}$$

נקבל אי יציבות.

אם θ הזווית בין $\vec{k}$ ל- $\vec{U}$, נקבל שהתנאי הוא:

$$|k| > \frac{g(\alpha_2-\alpha_1)}{\alpha_1\alpha_2 U^2\cos^2\theta}$$

בפרט ישנו k_{min} שהוא:

$$k_{min} = \frac{g(\alpha_1-\alpha_2)}{\alpha_1\alpha_2 U^2}$$

במציאות:

א) אם יש מתח פנים, אז ב- k מספיק גדול, מתח הפנים מייצב את המערכת.

ב) במערכת עם צפיפות שמשתנה בצורה מתונה (למשל, צפיפות בגובה) צריך ש- k_{min} יהיה מספיק קטן.

$$k_{min} \lesssim 1/l$$

כאשר l הוא המרחק האופייני בה הצפיפות דועכת כפקטור e
(Scale height).

$$1/l > \frac{g}{(\Delta U)^2} \sim \underbrace{\frac{(\Delta U)^2}{gl}}\gtrsim 1$$

נקרא מספר Ri^{-1}, חישוב מלא נותן:

$Ri < 0.25 \Rightarrow$ אי יציבות.