זרימה אידיאלית בנוזל בלתי דחיס, ללא ערבוליות (= זרימה פוטנציאלית).

משוואת הרציפות נראית:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})$$

עבור זרימה בלתי דחיסה $\rho=const$ ולכן:
$$0 = -\rho\vec{\nabla}\cdot(\vec{v}) \Longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$$

אם בנוסף הזרימה היא זרימה פוטנציאלית, דהיינו, ש- $\vec{\nabla}\times\vec{v}=0$ או $\vec{v}=\vec{\nabla}\phi_v$

אזי נקבל:
$$\boxed{\Delta\phi_v = 0}$$

זוהי משוואת לפלס, ואותה ניתן לפתור במספר רב של דרכים ושיטות:

שיטות לפתרון משוואת לפלס (או פואסון אם יש מקורות).

- שיטות ספקטרליות: כאן משתמשים בעובדה שאת הפתרון (פונקציה כלשהי) ניתן לכתוב כסכום של פונקציות אורתוגונליות שפורשות את כל המרחב הפונקציות. אותן בוחרים תלוי בגיאומטריה כך שניתן יהיה להכתיב את תנאי השפה בצורה קלה.
  * על מלבן נשתמש ב- $\sin, \cos$
  * בגליל נשתמש בפונקציות בסל J ובני הדודים.
  * בקואורדינטות כדוריות נשתמש בפולינומי לג'נדר (או Y_ℓ^m אם יש תלות אזימוטלית). בקיצור למתמטיקאים הוי דומה לפיתוח ב- Y_ℓ^m.

- בשני מימדים ניתן להשתמש במספרים מרוכבים

- פונקציות גרין: ניתן לתאר את הפתרון בעזרת פונקציית גרין (כפי שנעשה בחשמל).

- טריקים: למשל, שיטת הדמויות.

- שיטות נומריות: למשל, תאור הבעיה על שריג דיסקרטי ופתרון מקורב של משוואת לפלס.

תנאי שפה למשוואת לפלס

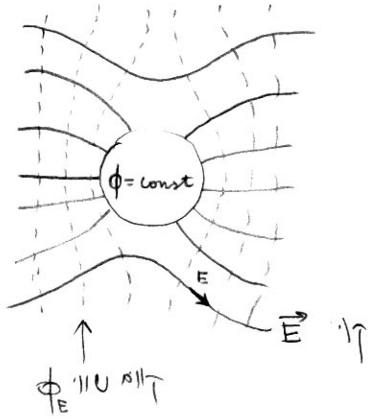
תנאי השפה בבעיית זרימה הוא לרוב שאין תנועה של חומר דרך השפה. לכן נדרוש כי על השפה יתקיים $\vec{v}_\perp = 0$. המשוואות לגבי הפוטנציאל הן:

$$\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\phi_v = 0$$

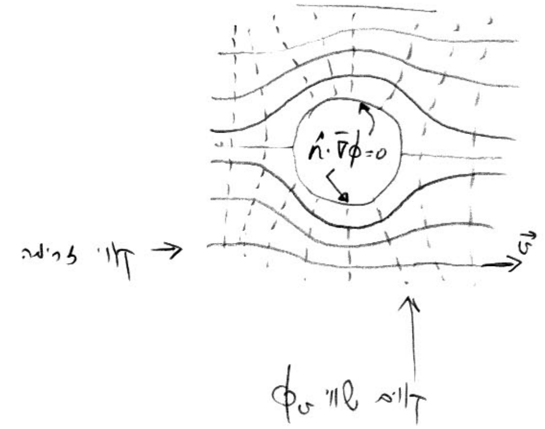
כאשר $\hat{n}$ הוא וקטור יחידה בכיוון ניצב לשפה. בבעיות החשמל, תנאי השפה לפוטנציאל הוא לרוב $\phi = const$ אם השפה היא מוליך, זאת מפני שהשדה החשמלי מקיים שהרכיב המקביל שלו מתאפס ולא הרכיב הניצב.

איכותית, נצפה שקווי השדה/מהירות והקווים שווי הפוטנציאל במקרה של כדור בתוך זרימה קבועה ומוליך כדורי בתוך קבל יראו:

שדה חשמלי

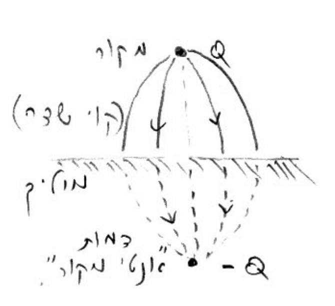


שדה מהירות

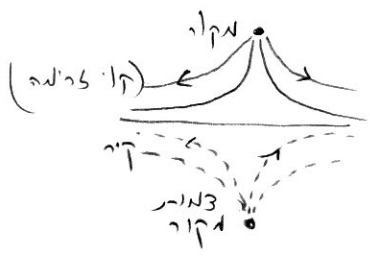


בגלל השוני בתנאי שפה, פתרון בעזרת דמויות, למשל, ידרוש תנאים שונים במעט. במקום למשל דמות בסימן אחד, צריך לשים דמות עם סימן הופכי.

חשמל:

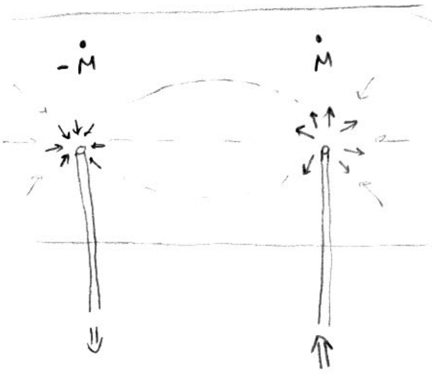


שדה זרימה

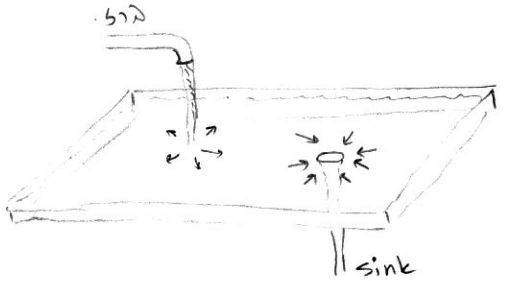


פתרון בעזרת דמויות

שיטת הדמויות שימושית כאשר ישנם מקורות מסה, למשל, ברז מים המכניס מים או מוציא מים:



והיא יכולה לעבוד גם בשני מימדים למשל:



אם ישנם מקורות, המשוואה הבסיסית $\vec\nabla\cdot\vec v=0$ צריכה להיות מתוקנת.

$\vec\nabla\cdot\vec v$ נותן כמה חומר יוצא מתוך אלמנט d^3x. כדי לראות בקלות מה צריך להיות, נשווה לשדה החשמלי:

$$\vec\nabla\cdot\vec E = 4\pi\rho \implies E=\frac{Q}{r^2} \longleftrightarrow \rho=\delta^3(\vec x)Q$$

ואילו כאן:

$$\vec v = \frac{\dot M}{4\pi\rho_w r^2}\hat r$$

לכן, המשוואה:

$$\vec\nabla\cdot\vec v = \frac{\dot M}{\rho_w}\delta^3(\vec x)$$

משוואת פואסון החשמלית היא:

$$\nabla^2\phi_E = -4\pi\rho$$

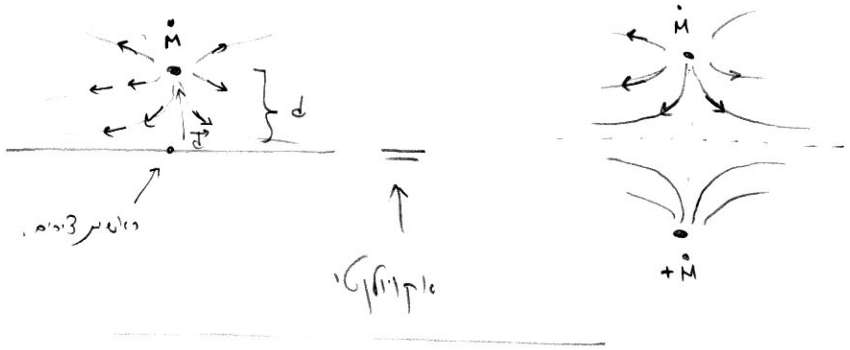
אולם במקרה של זרימה, $\vec v$ מוגדר ע"י "+" : $\vec v=\nabla\phi_v$ ולא "-" : $\vec E=-\nabla\phi_E$ ולכן:

$$\nabla^2\phi_v = \frac{\dot M}{\underbrace{\rho_w}_{\text{צפיפות המים}}}\delta^3(\vec x)$$

כדי לקבל תנאי שפה כאלה ואחרים, ניתן להשתמש במקורות "דמויים", לרוב בעלי "מטען" זהה כדי לקבל ש- $\hat n\cdot\vec\nabla\phi=0$ על השפות.

דוגמאות לשימוש בשיטת הדמויות

— מה שדה הזרימה של מקור $\dot M$ הנמצא במרחק d מקיר?



הבעיה אקוויולנטית למקור + מקור זהה במרחק d- מהקיר, שדה הזרימה יהיה לכן:

$$\vec v = \left(\text{מהירות ממקור 1}\right) + \left(\text{מהירות מהדמות}\right) = \frac{\dot M(\vec r-\vec d)}{4\pi\rho|\vec r-\vec d|^3} + \frac{\dot M}{4\pi\rho}\frac{\vec r+\vec d}{|\vec r-\vec d|^3}$$

— ומה הבעיה היתה דו מימדית? במקרה זה שדה המהירות ממקור $\dot M$ היה: (אם המקור בראשית)

$$\vec v = \frac{\dot M}{2\pi|r|l\rho}\hat r$$

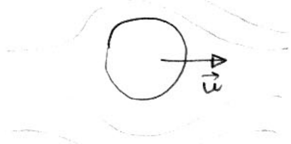
כאשר l הוא רוחב הנוזל ה-z. לכן, במקרה של מקור ליד קיר, שדה המהירות שמתקבל הוא:

$$\vec v = \frac{\dot M}{2\pi\rho l}\frac{\vec r-\vec d}{|\vec r-\vec d|^2} + \frac{\dot M}{2\pi\rho l}\frac{\vec r+\vec d}{|\vec r+\vec d|^2}$$

כאשר $\vec r$ הוא כמובן וקטור 2D.

דוגמאות לשימוש במולטיפולים

מהו שדה הזרימה סביב כדור שנע בנוזל במהירות $\vec{u}$, בהנחה שהנוזל נמצא במנוחה ב- ∞?



אם הנוזל התחיל ממנוחה והזרימה היא ללא צמיגות המשמעות היא שהזרימה התחילה עם $\vec{\nabla}\times\vec{u}=0$ ולכן היא תשאר ללא ערבוליות. הזרימה היא לכן זרימה פוטנציאלית המקיימת $\Delta\phi_u=0$.

את הפתרון ניתן לתאר בדרכים שונות (למשל, סכום על Y_l^m כפי שנעשה בתרגול). הפעם נתאר את הפתרון בעזרת פיתוח למולטיפולים:

$$\phi=\frac{a}{r}+\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}+Q_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}+T_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r}+\dots$$

כאשר a, $\vec{A}$, Q_{ij} וכן הלאה הם קבועים שמתארים את הפתרון, יש למצוא אותם ע"י תנאי השפה.

מספר מילים לפני שנפנה בתנאי השפה. ראשית, אם נשווה לדרך הפתרון עם Y_l^m נראה שישנם איברים נוספים שתלויים בחזקות חיוביות של r: ($r^{l+1}Y_l^m$) אולם כאן הם אינם חשובים היות והפתרון חייב לקטון ל- $u\to0$ ב- $r\to\infty$.

שנית, ניתן לראות שאם $1/r$ פותר את משוואת לפלס, אזי גם נגזרות, הסיבה היא שנגזרות הן חילופיות עם ה- Δ:

$$\Delta\left(Q_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}\right)=Q_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$$

שלישית, ניתן לראות שמספר הקבועים שמתארים כל סדר זהה למספר הפונקציות Y_l^m. למשל, עבור $l=2$ ישנם $2l+1=5$ איברים. בפיתוח למולטיפולים, ישנם 9 איברים ב- Q_{ij} אולם Q_{ij} הוא סימטרי כי אין משמעות ל- $Q_{ji}\neq Q_{ij}$ וגם $Tr(Q_{ij})$ מתאפס. זאת מפני שה Tr נותן לנו את אופרטור לפלס על $1/r$ שמתאפס זהותית. לכן, ישנם בפועל רק 5 איברים ב- Q_{ij} שהם בעלי משמעות.

תנאי השפה: תנאי השפה שלנו הוא שהמהירות הניצבת לפני השטח שווה לאפס,
מסי-למערכת המשטח לכן, אנו דורשים:

$$(\vec{v}-\vec{u})_\perp = 0 \implies \vec{v}\cdot\hat{r} = \vec{u}\cdot\hat{r}$$

כמו כן, ניתן לומר ש- a צריך להתאפס. איבר ה- $1/r$ מופיע אם יש מקורות (או sinks) של זרימה, ואין לנו.
בנוסף, הסימטריה ו התנאי שפה שלנו מרמז $\cos\theta$ (הזווית בין $\vec{u}$ ל- $\hat{r}$).
ולכן, ננחש כי רק האיבר $\vec{A}$ יופיע בפתרון, אם נגלה שלא ניתן לתאר את תנאי השפה רק עם $\vec{A}$ יהיה צריך להוסיף איברים גבוהים יותר (אך זה לא יקרה...)

לכן, ננחש:
$$\phi = \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = A_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}$$

נחשב את הנגזרת
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx_i} \quad ; \quad \frac{dr}{dx_i} = \frac{d\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right)}{dx_i} = \frac{x_i}{r}$$
$$= -\frac{x_i}{r^3}$$

ולכן:
$$\phi = -\frac{A_i x_i}{r^3} = -\frac{\vec{A}\cdot\vec{x}}{r^3}$$
כתיב טנסורי
כתיב וקטורי

המהירות היא לכן:
$$v_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\phi = -A_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\frac{1}{r^3} - \frac{3A_i x_i}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x_j}$$
$$= A_i\left(\frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3}\right)$$

או בכתיב וקטורי
$$\vec{v} = \vec{A}\left(\frac{3\hat{r}(\vec{u}\cdot\hat{r}) - \vec{u}}{r^3}\right)$$
$\hat{r}$ - וקטור יחידה בכיוון רדיאלי.

כעת נכתוב את תנאי השפה

$$\vec{v}\cdot\hat{n} = \left(\frac{2(\hat{r}\cdot\vec{A})}{R^3}\right) \overset{\text{תנאי שפה}}{=} \vec{u}\cdot\hat{r}$$
רדיוס הכדור,

לכן:
$$\vec{A} = \frac{\vec{u}\cdot R^3}{2}$$

לסיכום:
$$\phi = -\frac{R^3}{2r^2}\hat{r}\cdot\vec{u} \quad ; \quad \vec{v} = \frac{R^3}{2r^3}\left[3\hat{r}(\vec{u}\cdot\hat{r}) - \vec{u}\right]$$

למה שווה התפלגות הלחץ על פני הכדור?

אנו יודעים שמתקיים בזרימה פוטנציאלית כי

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho} = f(t) = P_0 + 0 + 0$$

נחשב את הקבוע ב- ∞

לכן:

$$P = \underbrace{P_0}_{\text{הלחץ ב-}\infty} - \frac{1}{2}\rho v^2 - \rho\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

אבל $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ שונה מאפס. הסיבה נעוצה בכך שה-ϕ שחישבנו נכון רק ברגע ההתלכדות של מרכז הכדור עם הראשית. יותר דיוק, אנו חישבנו את הפתרון במערכת המעבדה בה הכדור נע והפתרון שמצאנו נכון רק עבור רגע ההתלכדות.

* דרך אחת למצוא את $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ היא להכליל את הפתרון לכל זמן שהוא, כו הכדור נמצא ברדיוס $r_0(t)$:

$$\phi(t) = -\frac{R^3(\vec r - \vec r_0(t))\cdot\vec u}{2|\vec r - \vec r_0(t)|^3}$$

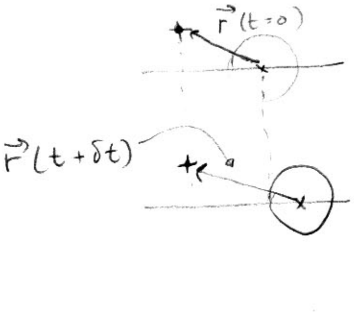
ולגזור לפי הזמן:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \ldots \quad (\text{ארוך})$$

יופיעו שני סוגי איברים. נגזרות של $\frac{d\vec r_0}{dt} = \vec u$ ונגזרות של $\frac{d\vec u}{dt}$.

* אנו נגזור את ϕ לפי ההכללה, ע"י הבנת מקור שני סוגי האיברים.

האיבר הראשון נובע מכך שברגע נתון, נתון ϕ וברגע שאחרי, אותה הנקודה היא במרחק $\vec r$ אחר מהראשית ושדה הזרימה השתנה.



נגררת בכיוון $\vec u$!

שינוי זה ב-ϕ יהיה:

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{\text{גרירה}} = \frac{\phi(\vec x - \vec u\cdot\delta t) - \phi(x)}{\delta t}$$

$$= -\vec u\cdot\underbrace{\vec\nabla\phi}_{=\vec v} = -\vec u\cdot\vec v$$

האיבר השני נובע מהעובדה שהמהירות $\vec{u}$ יכולה להשתנות:

$$\phi = -\frac{R^3}{2r^3}\,\vec{u}\cdot\vec{r}$$

$$\hookrightarrow \left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right| = -\frac{R^3}{2r^3}\,\underbrace{\frac{d\vec{u}}{dt}}\cdot\vec{r}$$

תאוצה

שימו לב כי u הינה פונקציה רק של הזמן ולכן אין משמעות לנגזרת חלקית.

סה"כ נקבל:

$$p = p_0 - \frac{\rho}{2}v^2 + \rho\vec{v}\cdot\vec{u} - \frac{R^3\rho}{2r^3}\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{r}$$

נרצה להציב את $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \frac{R^3}{2r^3}\left(3\hat{r}(\vec{u}\cdot\hat{r}) - \vec{u}\right)$$

$$v^2 = \frac{R^6}{2^2r^6}\left(9(\vec{u}\cdot\hat{r})^2 - 6(\vec{u}\cdot\hat{r})(\vec{u}\cdot\hat{r}) + u^2\right) = \frac{R^6}{4r^6}\left(3(\vec{u}\cdot\hat{r})^2 + u^2\right)$$

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = \frac{R^3}{2r^3}\left(3(\vec{u}\cdot\hat{r})^2 - u^2\right)$$

סה"כ:

$$p = p_0 - \frac{R^6\rho}{8r^6}\left(3(\vec{u}\cdot\hat{r})^2 + u^2\right) + \frac{R^3\rho}{2r^3}\left(3(\vec{u}\cdot\hat{r})^2 - u^2\right) - \frac{R^3\rho}{2r^3}\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{r}$$

<u>מה הכוח על הגוף</u>?

אנו צריכים לחשב את:

$$\vec{F} = \int p\,d\vec{s}$$

על פני הגוף נתחיל עם חישוב הלחץ ב- $r=R$:

$$p(r=R) = p_0 + \left[-\frac{1}{8}\,3(\vec{u}\cdot\hat{r})^2 - \frac{u^2}{8} + \frac{3}{2}(\vec{u}\cdot\vec{r})^2 - \frac{u^2}{2}\right]\rho - \frac{\rho}{2}\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{r}$$

$$= p_0 + \left[\frac{9}{8}(\vec{u}\cdot\hat{r})^2 - \frac{5}{8}u^2\right]\rho - \frac{\rho}{2}\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{r}$$

על פני השפה נקבל אם כן:

$$\vec{F} = \underbrace{\int p_0\,d\vec{s}}_{=0} + \overbrace{\frac{\rho u^2}{8}\int\left[9\underbrace{\cos^2\theta}_{\text{הזווית בין } \hat{r} \text{ ל-} \vec{u}} - 5\right]\cdot d\vec{s}}^{\text{מתאפס.}} - \frac{\rho}{2}R\int(\dot{\vec{u}}\cdot\hat{r})\,d\vec{s}$$

האינטגרל האמצעי מתאפס. הסיבה היא שבנקודה אחת ב-θ נתון

$d\vec{s}$ היא בכיוון מסוים, ואילו בנקודה השני של הכדור $\cos\tilde{\theta}$ יהיה זהה אך $d\vec{s}$ יהיה

בכיוון ההפוך! לכן:

$$\vec{F} = -\frac{\rho}{2} R \int (\dot{\vec{u}}\cdot\hat{r})\, d\vec{s}$$

מסימטריה, ל-$\vec{F}$ יהיה רכיב רק בכיוון $\dot{\vec{u}}$, נגדיר לכן זווית $\tilde{\theta}$ שהיא

הזווית בין $\hat{r}$ לבין $\dot{\vec{u}}$ והרכיב של $d\vec{s}$ באותו כיוון יהיה $\cos\tilde{\theta}$: $d\hat{\vec{s}}\cdot\hat{\dot{\vec{u}}} = \cos\tilde{\theta}$

$$\vec{F}\cdot\hat{\dot{\vec{u}}} \equiv \underbrace{F_{ac}}_{\text{acceleration}} = -\frac{\rho}{2} R \int \underbrace{|\dot{\vec{u}}|\cos\tilde{\theta}}_{\dot{\vec{u}}\cdot\hat{r}} \cdot \underbrace{\cos\tilde{\theta}\, ds}_{d\vec{s}\cdot\hat{\dot{\vec{u}}}}$$

$$= -\frac{\rho|\dot{\vec{u}}|R}{2} \underbrace{\int \cos^2\tilde{\theta}\, ds}_{\frac{4\pi}{3}R^2} = -\frac{4\pi\rho|\dot{\vec{u}}|R^3}{6}$$

אנו רואים כי:

א) אם אין תאוצה: $\dot{\vec{u}}=0$ אזי אין כח התנגדות

מהזרימה על הגוף! הסיבה היא מפני שאין חיכוך

בזרימה. אם אין דיסיפציה אזי גם לא ניתן לקבל כח גרר

שהוא כח דיסיפטיבי.

ב) אנו רואים שכדי להאיץ את הגוף, יש להתגבר על כח

נוסף, הוא נובע מהעובדה שיש להאיץ את הנוזל.

נחשב את האנרגיה הקינטית של הנוזל:

$$E_{kin} = \int_{r>R} dv\cdot\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{R^6\rho}{4\cdot 2}\int \frac{dv}{r^6}\Big(3\underbrace{(\vec{u}\cdot\hat{r})^2}_{u^2\cos^2\theta} + u^2\Big) =$$

$$= \frac{R^6\rho u^2}{8}\, 2\pi \int_{r=R}^{\infty}\frac{dr}{r^6}\, r^2 \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\cdot(3\cos^2\theta + 1) = \frac{\pi}{3}\rho R^3 u^2$$

אינטגרל על φ.

מהיעקוביאן.

סה"כ האנרגיה הקינטית במערכת היא :

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{m_0 + \overbrace{\frac{2\pi}{3}\rho R^3}^{m_1}}_{m_{eff}}\Big)u^2$$

אנו יכולים לתאר את התנועה הכוללת כאילו לגוף יש מסה אפקטיבית שגדולה יותר מהמסה המקורית. אם למשל צפיפות הכדור כצפיפות הנוזל אזי המסה האפקטיבית גדלה ב - 50 אחוז מהמסה המקורית!

הסיבה היא שכאשר מאיצים את הגוף יש צורך להאיץ את הנוזל מסביב, פעולה הדורשת אנרגיה. זה גם המקור לכח שקיבלנו מקודם.

באופן כללי המסה האפקטיבית של הגוף לא צריכה להיות סקלר, אלא יכולה להיות טנזור שהוא תבנית ריבועית:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} M_{eff,ij}\, u_i u_j$$

ההכללה של משוואות התנועה תהיה:

$$\overbrace{m_0 \frac{d\vec{u}}{dt}}^{\text{תאוצת הכדור}} = \vec{f}_{ext} - \underbrace{m_1 \frac{d\vec{u}}{dt}}_{\text{הכח שמפעיל הנוזל על הכדור.}}$$

$$\hookrightarrow \underbrace{(m_0+m_1)}_{m_{eff}} \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}_{ext}$$

ובאופן כללי:

$$M_{eff,ij}\frac{du_i}{dt} = f_{ext,j}$$

כלומר, מסה לא סקלרית יכולה לתת כח בכיוון אחד ותאוצה בכיוון אחר!
(כמו שבתנועה סיבובית כיוון $\vec{L}$ וכיוון $\vec{\omega}$ לא חייבים להיות זהים אם I אינה אלכסונית!).