אלסטיות - המשך

נבחן שוב את המוט, הנמצא במצב מתיחה בציר $\hat{z}$. מתיחה זו תגרור התכווצות (או מתיחה!) של צירים $\hat{x}$ ו-$\hat{y}$.

$$\sigma_{zz} = f = \frac{\text{כח ליחידת}}{\text{שטח}} = \frac{F}{A}\begin{matrix}\text{- כח כולל}\\ \text{- שטח חתך.}\end{matrix}$$

$$\sigma_{ij\neq zz} = 0$$

שימו לב כי אילו היה לחץ p, כי אז $f=-p$. דהיינו, הסימן של σ היה הפוך לזה של הלחץ.

נציב בקשרים שקבלנו בין σ ו-u מקודם, ונקבל:

$$u_{ik} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ik} - \nu\sigma_{ll}\delta_{ik}\right]$$

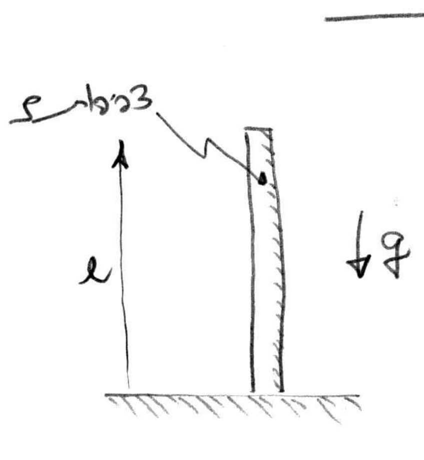
כלומר:

$$u_{zz} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{zz} - \nu\left(\cancel{\sigma_{xx}} + \cancel{\sigma_{yy}} + \sigma_{zz}\right)\right]$$

$$= \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{f}{E}$$

$$u_{xx} = u_{yy} = -\nu\frac{f}{E} \qquad u_{ij},\ i\neq j = 0$$

אנו רואים שכאשר ציר $\hat{z}$ מתארך, צירי x-y מתכווצים בפקטור ν ביחס לציר z. עבור ν <u>שלילי</u> (נדיר אבל קיים) x-y יתרחב!



* נסתכל על מוט שעומד על קרקע

למה שווה העיוות בכל נקודה ונקודה?

כדי למצוא את u, נפתור עבור σ ומשם את u.

משוואות שיווי המשקל הן:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0$$

תנאי השפה הם שהרכיב הנורמלי של כל σ מתאפס בכל הפאות פרט לתחתית. נניח כרגע ש- σ_{zz} על התחתית קבוע, דהיינו, שאין כל תלות של ה- σ_{ij} ב- x או y. (נבין את המשמעות בסוף). במקרה כזה, רכיב z של משוואת הכוחות תהיה:

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho(-g) = 0$$

לכן:

$$\sigma_{zz} = \int_0^z \rho g \, dz = \rho g z + A = -\rho g(l-z)$$

$\sigma_{zz}(z=l)=0$ הוא

שאר הרכיבים מתאפסים.

נציב כעת במשוואה לעיוות:

$$u_{yy} = u_{xx} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{zz} = \frac{\nu}{E}\rho g(l-z)$$

$$u_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = -\frac{\rho g(l-z)}{E}$$

u_{ij} הוא העיוות היחסי. נחפש את העיוות האבסולוטי:

$$u_{xx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

לכן:

$$u_x = \int u_{xx}\, dx = \frac{\nu}{E}\rho g(l-z) + \underbrace{f_x(y,z)}_{\text{"פונקציית" אינטגרציה (במקום "קבוע").}}$$

מסימטריה ברור כי $f_x = 0$ (הזזה u_x צריך להיות אנטי סימטרי ב-x).

לכן:

$$u_x = \frac{\nu}{E}\rho g(l-z)x$$

$$u_y = \frac{\nu}{E}\rho g(l-z)y$$

ובאופן דומה!

ולבסוף:

$$u_z = \int u_{zz}\, dz = -\frac{\rho g}{E}\left(l z - \frac{z^2}{2}\right) + f_z(x,y)$$

נעזר כעת בעובדה כי $u_{xz}=0$ דהיינו, ש-

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = u_{zx} = 0$$

כלומר:

$$\frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\nu}{E}\rho g x$$

לכן:

$$f_z = \frac{\nu}{2E}\rho g x^2 + h(y) = \frac{\nu}{2E}\rho g (x^2+y^2)$$

סימטריית $x-y$

וזה נכון עד כדי קבוע

$$u_z = -\frac{\rho g}{2E}\left(2lz - z^2 - \nu(x^2+y^2)\right) + C$$

אני רואה ש-

הפתרון אינו כשר למקרים כי הקצה התחתון נראה . זה נובע מההנחה שלי על תנאי השפה על σ. כדי להפתר מזה, היינו צריכים לא לרשום ש- $\sigma_{zz} = const$ אלא ש- $u_z=0$ על התחתית. אולם הפתרון היה אז מסובך הרבה יותר:

בדוגמה האחרונה, כתבנו משוואה ל-σ_{ij}, ממנה מצאנו את u_{ij} ומשם את u_i.
אולם, ניתן היה למצוא ישר משוואה עבור u_i ולפתור אותה

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{(1+\nu)}\left(u_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu}u_{ll}\delta_{ik}\right)$$

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0$$

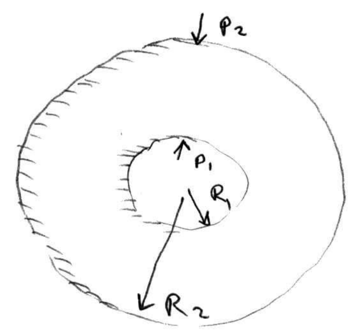
$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{E}{2(1+\nu)}\underbrace{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}}_{= \Delta\vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u})} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\underbrace{\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i\partial x_l}}_{=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})} + \rho g_i = 0$$

משוואה זו ניתנת לכתיבה כ-

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}u) - \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\right)\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u}) = -\rho g\left(\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\right)$$

דוגמה בקואורדינטות כדוריות:



נתון כדור חלול עם רדיוס פנימי R_1 ולחץ p_1 ורדיוס חיצוני R_2 ולחץ p_2.

מה יהיה העיוות?

פתרון:

לחץ → "-"

תנאי שפה:
$$\sigma_{rr}(r=R_1) = -p_1$$
$$\sigma_{rr}(r=R_2) = -p_2$$

אין כריכה ומסימטריה אין $\vec{\nabla}\times\vec{u}$. המשוואה שלנו היא אם כן:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r)\right) = 0$$

קואור' כדוריות

נבצע אינטגרציה:

$$\hookrightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r^2}(r^2 u_r)=a$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r)=ar^2$$

$$\hookrightarrow r^2 u_r=\frac{ar^3}{3}+b$$

$$\hookrightarrow u_r=\frac{a}{3}r+\frac{b}{r^2}$$

בקואורדינטות ספריות או כדוריות, הקשר בין u_i ל- u_{ij} יותר מורכב.

$$u_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r}=\frac{a}{3}-\frac{2b}{r^3}$$

$$u_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}=\frac{a}{3}+\frac{b}{r^3}$$

$$u_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\underbrace{\cancel{\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\frac{u_\theta}{r}}}_{0}\cot\theta+\frac{u_r}{r}=\frac{a}{3}+\frac{b}{r^3}$$

לכן:

$$\sigma_{rr}=\frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\Big((1-\nu)u_{rr}+\nu(u_{\varphi\varphi}+u_{\theta\theta})\Big)=$$

$$=\frac{E}{(1-2\nu)}\frac{a}{3}-\frac{2E}{(1+\nu)}\frac{b}{r^3}$$

מהצבת תנאי השפה מקבלים:

$$a=\frac{3(P_1R_1^3-P_2R_2^3)}{R_2^3-R_1^3}\left(\frac{1-2\nu}{E}\right)$$

$$b=\frac{R_1^3R_2^3(P_1-P_2)}{R_2^3-R_1^3}\left(\frac{1+\nu}{2E}\right)$$

עבור קליפה דקה עם: $p_1-p_2=\Delta p$, נקבל:

$$R_2^3-R_1^3\simeq 3\Delta R\cdot R^2;\quad R_2-R_1\simeq\Delta R\ll R$$

$$\hookrightarrow \overline{\sigma}_{rr}=\frac{1}{2}\Delta p\qquad \sigma_{\theta\theta}=\sigma_{\varphi\varphi}=\frac{1}{2}\Delta p\frac{R}{\Delta R}$$