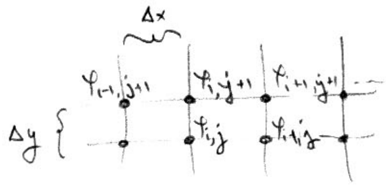
פתרון משוואת לפלס בעזרת מחשב

(בונוס - למי שמתעניין
לא לבחינה)

לעתים, כאשר לא ניתן לפתור בעיה בדרך אנליטית, אין מנוס מפתרון נומרי. ישנן כמובן שיטות רבות. חלקן דומות לשיטות האנליטיות, כגון פיתוח ספקטרלי (לאוסף של פונקציות שמקיימות את המשוואה). וישנן שיטות המקרבות את המרחב הרציף לשריג. בכך, אנו הופכים את בעיית המשוואה הדיפרנציאלית החלקית לאוסף משוואות אלגבריות. נבחן כעת שיטה אחת כזו, פשוטה יחסית.



נניח נתון שריג:

נקרב את הפונקציה שלנו

על השריג: $\varphi(x,y) \to \varphi_{ij}$

נוכל לתאר נגזרת ראשונה בקירוב:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \simeq \frac{\varphi_{i+1,j}-\varphi_{i,j}}{\Delta x}$$

נוכל לתאר את הנגזרת השנייה ע"י שימוש באותו קירוב:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \simeq \frac{\varphi'_{i,j}-\varphi'_{i-1,j}}{\Delta x} \simeq \frac{\left(\frac{\varphi_{i,j}-\varphi_{i-1,j}}{\Delta x}\right)-\left(\frac{\varphi_{i+1,j}-\varphi_{i,j}}{\Delta x}\right)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\varphi_{i+1,j}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

לכן, ניתן לכתוב את משוואת לפלס (או באופן יותר כללי את משוואת פואסון) כ:

$$\underbrace{\Delta^2\varphi = S}_{\text{Source term}} \Rightarrow \frac{\varphi_{i+1,j}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{\varphi_{i,j+1}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

$$= \underbrace{S_{i,j}}_{\text{נתון}}$$

אם ישנם $M \times N$ נקודות שריג, אזי קיבלנו $M \times N$ משוואות אלגבריות מצומדות. ניתן לפתור אותן במספר דרכים. למשל, ע"י הפיכת המטריצה:

$$\bar{\bar{A}}\,\underset{\sim}{\bar{\varphi}} = \bar{S} \Rightarrow \bar{\varphi} = \bar{\bar{A}}^{-1}\bar{S}$$

וקטור המכיל את כל הנקודות:

$$\bar{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \vdots \\ \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

אופציה אחרת היא בשימוש בשיטה איטרטיבית שמתכנסת לפתרון.

נסתכל על המקרה בו $\Delta y = \Delta x$. נבודד את φ_{ij} בצד אחד ונקבל:

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{4}\left(\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i-1,j}\right) + S_{ij}\cdot\Delta x^2$$

כלומר, הפתרון של משוואת לפלס היא שבה φ_{ij} הוא הממוצע של ה-φ-ים שמסביב + איבר המקור.

ניתן לפתור את זה בשיטה איטרטיבית. נניח כי קיים ניחוש עבור φ, ונסמן אותו $\varphi^{(old)}$, ניתן לנחש פתרון חדש ע"י:

$$\varphi_{ij}^{(new)} = \frac{1}{4}\left(\varphi_{i+1,j}^{(old)} + \varphi_{i-1,j}^{(old)} + \varphi_{i,j+1}^{(old)} + \varphi_{i,j-1}^{(old)}\right) + S_{ij}\,\Delta x^2$$

מסתבר שאם נבצע פעולה זו מספר רב של פעמים, φ יתכנס אל הפתרון של משוואת לפלס.

ניתן לגרום לפתרון להתכנס יותר מהר ע"י לקיחת צעד גדול יותר:

$$\varphi_{ij}^{(actual)} = \varphi_{ij}^{(old)} + \alpha\left(\varphi_{ij}^{(new)} - \varphi_{ij}^{(old)}\right)$$

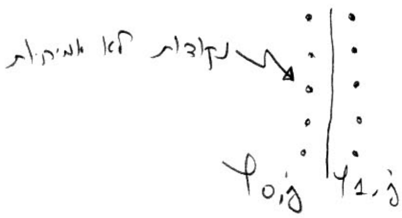
$\alpha = 1$ נותן את ההתכנסות הרגילה. $\alpha < 1$ - יותר איטי.

ו-α נותן התכנסות מהירה יותר אולם α גדול מדי יהפוך את ההתכנסות להתבדרות. לרוב דרוש $\alpha < 2$ אולי לפעמים גם ו-$\alpha > 2$ יכול לגרום לאי-התכנסות.

כעת ניתן לדבר על התנאי שפה. תנאי השפה היא לרוב שהשטף הניצב נתון (למשל, 0 אם אין שטף מסה דרך שפה קשיחה).

אם מדובר בשפה השמאלית:

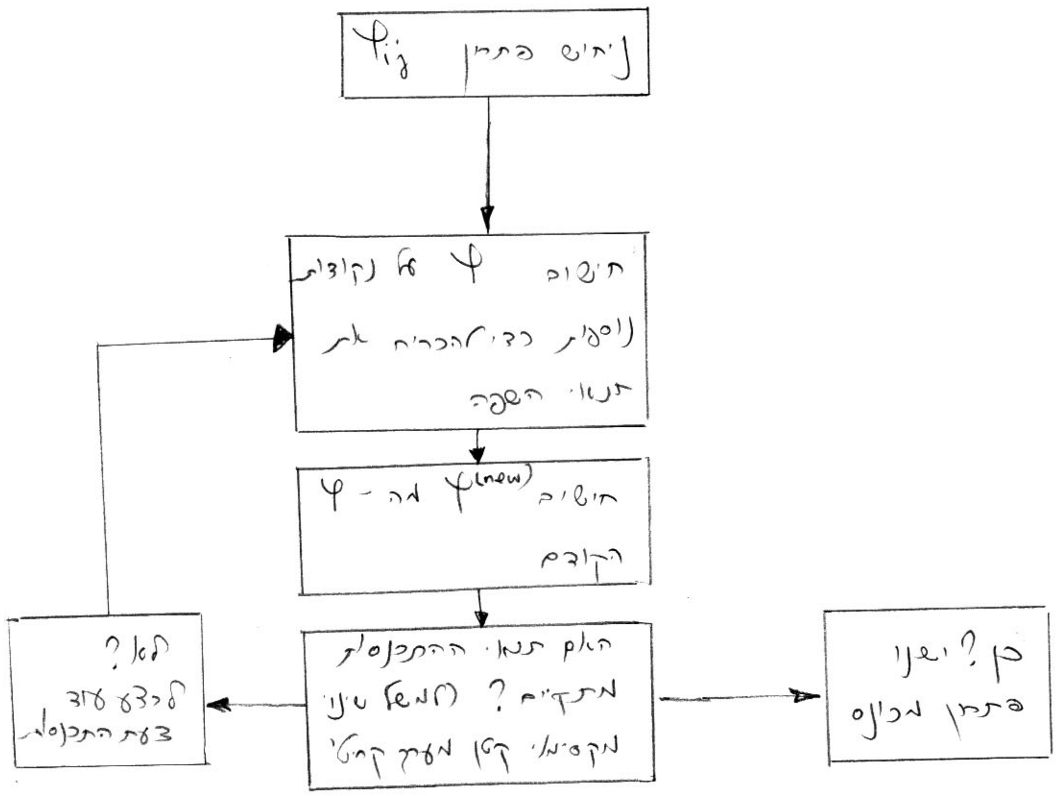
$$v_\perp = \hat{n}\cdot\vec{\nabla}\varphi \simeq \frac{\varphi_{1,j}-\varphi_{0,j}}{\Delta x} = \underbrace{v_{\perp,j}}_{\text{נתון}}$$



ז"א, אנו צריכים שערך φ בנקודות $\varphi_{0,j}$ יהיה:

$$\varphi_{0,j} = \varphi_{1,j} - v_{\perp,j}$$

כלומר, הדרך להתייחס לתנאי השפה היא להגדיר נקודות נוספות מחוץ לשריג חישוב, לתת להן ערך לפי תנאי השפה ואח"כ לחשב את $\varphi_{ij}^{(new)}$ על נקודות השריג בעזרת הנקודות הנוספות. הדרך לפתרון היא אם כן:



אחרי שישנו φ מכונס, ניתן ממנו לחשב למשל את התפלגות הלחץ, את שכבת המהירות וכו'...

<u>מספר נקודות</u> לשים לב:

1) אם כל תנאי השפה הם על הנגזרת של φ, φ לא מוגדרת עד כדי קבוע ולכן φ יכול "לנדנד" לערכים גדולים יותר או קטנים יותר בלי שיראה כאילו הוא מתכנס. לכן במקרה כזה יש לקבוע את φ בנקודה אחת באופן שרירותי.

2) יש לשים לב שתנאי השפה הגיוניים, למשל שלא תכריח למסה להכנס ללא אפשרות לצאת בשום מקום.